de
Math. P.
541 f
Stein

16

Carl Phil. Christ. Stein's,

vormals Prorector am Gymnasium zu Idstein,

Grundlehren

der reinen und practischen

Geometrie

für die ersten Anfänger.

Verbessert und vermehrt

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königlich-Baierischem Schulrathe, Director des Lyceums und der Gymnasial-Anstalt zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Lyceum, erstem Prof. an dem Forstlehrinstitute ꝛc.

Zweite Auflage.

Mit acht Kupfertafeln.

Frankfurt am Mayn 1820,

in der Andreäischen Buchhandlung.

BIBLIOTHECA
MONACENSIS
Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede des Verfassers.

Eine Reihe der leichtesten Sätze aus Euclids Elementen, in sofern sie für die practische Geometrie wichtig und folgereich sind, so wie aus letzterer das Wesentlichste der Meßkunst, schien mir in den Umfang eines Lehrbuchs zu gehören, das für die ersten Anfänger bestimmt ist. Die Sätze aber ohne gehörigen Beweis und blos mit ihrer Nutzanwendung begleitet hinzustellen, halte ich immer, selbst für mechanische Köpfe, in vieler Hinsicht für schädlich, wenn sie auch weiter nichts von Mathematik als oberflächliche Kenntniß der Feldmeßkunst zu haben verlangen. Es werden ihnen viele Fälle vorkommen, wo sie sich nicht zu helfen wissen und wenn sie auch bisweilen der Zufall auf den rechten Weg führt, so können ihnen Zweifel aufstoßen, die sie nicht zu heben im Stande sind. Und läßt sich wohl überhaupt vom Lehrer der Grad der Fähigkeit seines

Schülers für mathematische Wissenschaften im Voraus bestimmen? Hat nicht so Mancher, wie die Erfahrung lehrt, ungewöhnliche Fassungsgabe für mathematische Wahrheiten, dem die Erlernung der Sprachen sehr schwer fällt.

Im Ganzen genommen begreifen junge Leute zwischen acht und vierzehn Jahren die Erklärungen in der Geometrie von Linien, Winkeln und Figuren sehr geschwind; nicht so leicht die nun folgenden Lehrsätze, wie sie in gegenwärtigem Lehrbuch mit §. 33. von der Congruenz der Dreiecke anfangen. Man gehe daher zu diesen nicht eher über, als bis man zuvor noch allerlei Uebungen angestellt hat. Man gebe ihnen nämlich auf, Dreiecke und Vierecke von verschiedener Form unter bestimmten Figuren zusammen zu setzen. Es wird z. B. ein Dreieck verlangt, das aus einem Fünfeck und noch zwei andern rechtwinkligen Dreiecken besteht ꝛc. ein Rectangel, das aus zwei Rectangeln und noch zwei Dreiecken zusammengesetzt ist, u. s. w. Bei der Zusammensetzung solcher Figuren gehe man immer vom Leichtern zum Schwerern über. Der Nutzen solcher Uebungen, die sehr mannigfaltig seyn können,

ist größer, als man glaubt. Sie werden gewöhnlich von der Jugend mit vielem Interesse angestellt, weil ihre Selbstthätigkeit dabei geweckt und unterhalten wird, und oft die Auflösung dieser Aufgaben auf gar vielfache Art möglich ist. Für die Folge bezwecken sie aber hauptsächlich das leichtere Auffassen und eine geschwindere Uebersicht der Beweise aller Lehrsätze, wenn das Bild, worauf sich jeder Beweis stützt, der Einbildungskraft lebendig vorschwebt. Wenn dann der Schüler solche Figuren auf Verlangen sogleich aus freier Hand, und ohne auf eine vorliegende Zeichnung zu sehen, an die Tafel zeichnen kann, so wird ihm der einmal gefaßte Beweis nicht leicht entfallen.

Bei diesem Lehrbuch dachte ich mir Schüler, welche Vorkenntnisse der gemeinen Arithmetik, nämlich die sogenannten 4 Species, die Bruchrechnung und selbst die Regel de Tri verstehen. Weil aber in vielen Lehrbüchern der Arithmetik die Decimalbrüche nicht gelehrt werden, so habe ich sie hier vorgetragen.

Für einen zweiten Cursus würde, ausser einer ausführlichern Geometrie, die Buchstabenrechnung, die Lehre von den Logarithmen

und ein strenger Vortrag der ebenen Trigonometrie gehören. Hierauf lasse man die Analysis folgen und nicht blos auf Fälle des gemeinen Lebens angewandt, sondern man entwickle auch mit ihrer Hülfe Formeln zur Auflösung trigonometrischer Aufgaben u. s. w. Die höhere Geometrie, die sphärische Trigonometrie, die mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften können dann den Bedürfnissen des Lehrlings gemäß auch vorgetragen werden.

Ich enthalte mich aller weitern Bestimmungen einer guten Methode beim Vortrage dieser Wissenschaft, und äussere nur noch den Wunsch, daß dieser Versuch, die Theorie von der Praxis gänzlich zu trennen, die rein wissenschaftliche Form gleich von Anfang der Jugend annehmlich, das Ganze aber fürs Denken zum Nachtheil der Gründlichkeit nicht allzuleicht zu machen, Beifall erhalten möge.

Idstein, im Mai 1810.

Vorwort des Herausgebers.

Die Grundlehren der reinen und practischen Geometrie für die ersten Anfänger, von dem nunmehr verstorbenen Prorector Stein zu Idstein im Herzogthum Nassau, waren dem Herausgeber bereits früher als eine nützliche Schrift bekannt. Unter Anleitung eines tüchtigen Lehrers wird dieselbe, bei dem öffentlichen und Privat-Unterrichte den Anfängern des geometrischen Studiums recht brauchbar seyn. Daher konnte man den Antrag der Herren Verleger, von diesem Lehrbuche eine neue Auflage zu besorgen, nicht mißbilligen, und der Herausgeber hat sich diesem Geschäfte um so theilnehmender unterzogen, als er hoffen durfte, durch vielfache Verbesserungen und Vermehrungen den Werth dieser Schulschrift,

welche bereits in mehreren öffentlichen Anstalten eingeführt ist, zu erhöhen.

Was die Verbesserungen betrifft, so werden dieselben dem aufmerksamen Leser, welcher diese zweite Auflage mit der ersten vergleicht, sehr häufig entgegentreten. Sie beziehen sich nicht nur auf Correctheit und schärfern Ausdruck in der mathematischen Schreibart, sondern vielfach auf strengere Beweise und nöthige Zusätze; bisweilen auf Berichtigung einiger Irrthümer. Auch sind dergleichen Verbesserungen in den Tafeln vorgenommen worden.

Hinsichtlich der Vermehrung hat man es für zweckmäßig gehalten, die Elemente der rechnenden Dreiecks-Lehre (Trigonometrie) als Zugabe beizufügen. Die Art, wie dieselbe aus dem Begriffe und aus der Berechnung der Sehnen im Kreise abgeleitet sind, scheint so populär, daß sich dieser kleine Abschnitt zur Belehrung der Anfänger eignen mag. Auch ist es ihnen erfreulich, durch Hülfe der kleinen Sehnentafel, die wichtigsten Fälle der Elementar-Trigonometrie sogleich berechnen zu können. Vielleicht werden Manche hierdurch, ermuntert, ihr Studium weiter auszudehnen und

das Gebiet der eigentlichen Trigonometrie zu betreten, wozu ihnen diese Vorbereitung den Weg bahnt.

Möge die neue Auflage dieser Schrift zur gründlichen Geistesbildung der Jugend Einiges beitragen!

Aschaffenburg, im October 1819.

Hoffmann.

Inhalts-Verzeichniß.

Erklärung einiger Zeichen.

Erklärungen. 1. Punct. 2. Linie. 3. Gerade und krumme Linie. 4. 5. Fläche. 6. Winkel. 7. Scheitelwinkel. 8. Nebenwinkel. 9. Figur. 10. Kreis. 11. Geradlinige Figuren. 12. Dreiecke. 13. 14. Vierecke. 15. Congruente Figuren.

16. 17. 18. Forderungen.

19. — 32. Grundsätze.

Die Congruenz der Dreiecke, nebst Anwendungen.

33. Ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

34. Zwei Seiten und der davon eingeschlossene Winkel bestimmen die Congruenz zweier Dreiecke.

35. Eben so zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite.

36. Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich.

37. Alle Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind einander gleich.

38. Die den gleichen Winkeln eines Dreiecks gegenüberliegenden Seiten sind einander gleich.

39. Drei Seiten bestimmen die Congruenz zweier Dreiecke.

40. Einen Winkel zu halbiren.

41. Eine gerade Linie zu halbiren.

42. 43. Perpendikel zu errichten.
44. Zwei Nebenwinkel sind zwei rechten Winkeln gleich
45. Alle Scheitelwinkel sind einander gleich.
46. Der äußere Winkel eines Dreiecks ist größer als einer der beiden innern ihm gegenüber liegenden.
47. Zwei Winkel und eine Seite, die einem derselben gegenüber liegt, bestimmen die Congruenz zweier Dreiecke.
48. 49. Der größern Seite steht in einem Dreieck auch der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt.
50. Zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen genommen größer als die dritte.
51. Aus drei gegebenen Linien ein Dreieck zu beschreiben.
52. Einen gegebenen Winkel an einen beliebigen Punct zu setzen.
53—59. Von Parallellinien.
60. Eine gerade Linie mit einer andern parallel zu ziehen.
61. Der äussere Winkel eines Dreiecks ist den beiden innern, die nicht seine Nebenwinkel sind, gleich.
62. Alle drei Winkel eines Dreiecks sind zwei rechten Winkeln gleich.
63. Gerade Linien zwischen gleichen Parallelen, sind selbst gleich und parallel.
64. Die in einem Parallelogramm gegenüber stehenden Seiten und Winkel sind einander gleich.
65. Eine Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.
66. 67. Parallelogramme so wie Dreiecke auf einerlei Grundlinie und zwischen einerlei Parallelen sind gleich.

68. Das Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, wenn beide gleiche Grundlinie und Höhe haben.
69. Ein Dreieck einem Parallelogramm gleich zu machen.
70. In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich.
71. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln.
72. Ein Parallelogramm einem Dreieck gleich zu machen.
73. Ein Quadrat zu beschreiben.
74. Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich den Quadraten der beiden Catheten zusammen genommen.

Vom Kreise.

75. 76. Eine gerade durch den Mittelpunct des Kreises gehende Linie steht, wenn sie die Sehne halbirt, auf ihr senkrecht, und umgekehrt.
77. Eine auf der Mitte der Sehne senkrechte Linie geht durch den Mittelpunct des Kreises.
78. Einen Kreis durch drei Puncte zu beschreiben, die nicht in gerader Linie liegen.
79. Durch einen gegebenen Punct der Peripherie eine Tangente zu ziehen.
80. Ein Winkel am Mittelpunct ist doppelt so groß, als ein Winkel an der Peripherie, wenn beide auf einerlei Bogen stehen.
81. Ein Winkel an der Peripherie, der auf dem Halbkreise steht, ist ein rechter.
82. Alle Winkel an der Peripherie auf einerlei Bogen sind einander gleich.

83. Gleiche Winkel am Mittelpunct in gleichen Kreisen haben auch gleiche Bogen und Sehnen.
84. Ein reguläres Vieleck zu zeichnen.
85. 86. Die Größe eines Polygonwinkels und eines Winkels am Mittelpunct im regulären Polygon zu finden.
87 Den Flächeninhalt eines regulären Polygons zu finden.
88. 89. 90. Ein verlangtes reguläres Polygon in einem Kreis, desgleichen um denselben und über einer gegebenen Linie, zu beschreiben.
91. Die Seite des regulären Sechsecks ist dem Halbmesser des Kreises gleich.
92. Der Kreis ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Peripherie und dessen Höhe dem Halbmesser des Kreises gleich ist.

Aehnlichkeit der Figuren.

93. Eine in lauter gleiche Theile getheilte gerade Linie theilt durch Parallellinien jede andere gleichfalls in lauter gleiche Theile.
94. Durch eine Parallele im Dreieck entstehen zwei Dreiecke mit proportionalen Seiten.
95. Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu suchen.
96. 97. 98. Von den Bedingungen der Aehnlichkeit zweier Dreiecke.
99. Einem Dreieck ein ähnliches zu beschreiben.
100. Durch ein Perpendikel aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks entstehen drei ähnliche Dreiecke.
101. Einer geradlinigen Figur eine ähnliche zu zeichnen.

Von den Körpern.

102—106. Erklärungen von Körper, Ebene, Neigung der Ebene und körperlichem Winkel.

107. Vom Prisma. 108. Parallelepipedum. 109. Würfel.

110. Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleichen Inhalts.

111. Cylinder oder Walze.

112. Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Product aus seiner Grundfläche und Höhe.

113. Pyramide.

114. Ein Schnitt durch die Pyramide, mit der Grundfläche parallel, ist dieser ähnlich.

115. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

116. Jede dreieckige Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.

117. Kegel.

118. Kegel und Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

119. Kugel.

120. Die Kugel ist zwei Drittel eines Cylinders, dessen Diameter und Höhe dem Diameter der Kugel gleich sind.

Von Decimalzahlen.

121—123. Erklärungen von Decimalzahlen und Decimalbrüchen.

124—127. Decimalbrüche zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren und zu dividiren.

128. Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Anwendung der Decimalbrüche ꝛc.

129. Das Quadrat als Einheit des Flächenmaaßes.
130. Ein Parallelogramm zu berechnen.
131. Ein Dreieck zu berechnen.
132. Die Grundlinie oder Höhe eines Dreiecks zu berechnen.
133. 134. Den Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen, wenn der Diameter oder die Peripherie gegeben ist.

Ausziehung der Quadratwurzel.

135. 136. Erklärung von Potenzen, Quadrat- und Cubikzahlen, und Wurzeln.
137. Aus einer gegebenen Quadratzahl die Wurzel zu finden.

Ausrechnung der Körper.

138. Den Inhalt eines gegebenen Prisma zu finden.
139. Den Inhalt einer Pyramide zu finden.
140. Den Inhalt eines Cylinders zu berechnen.
141. Den Inhalt eines Kegels zu finden.
142. Den Inhalt einer Kugel und ihre Oberfläche zu berechnen, wenn der Diameter gegeben ist.

Einige Sätze der practischen Geometrie.

143. Begriff der Geodäsie oder Feldmeßkunst.
144. Die Figuren müssen, auf den Horizont reducirt, gezeichnet seyn.

145. Eine Vertical-Ebene auf dem Felde abzustecken.
146. Eine Vertical-Ebene über Hügel zu verlängern.
147. Eine gerade Linie auf der Ebene zu messen.
148. Eine gerade Linie auf unebenem Boden zu messen.
149. Die Lage einer krummen Linie auf der Ebene zu bestimmen.
150. Perpendikel auf dem Felde zu ziehen.
151. Einen verjüngten Maasstab zu zeichnen.
152. Einen gegebenen Winkel auf das Papier zu tragen. Transporteur.
153. Die Größe eines Winkels auf dem Felde zu bestimmen. Vom Astrolabium, Meßtischgen, Quadranten u. s. w.
154. 155. 156. Die Entfernung zweier Gegenstände zu bestimmen, die sich wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht gerade zu messen läßt.
157. 158. 159. Die Höhe eines Gegenstandes zu messen.
160. Eine geradlinige Figur aus einem Standpuncte zu Papier zu bringen.
161. Eine krummlinige Figur auf dem Felde aus ihrem Umfang zu entwerfen.
162. Aus einer willkührlichen Standlinie eine Figur auf dem Felde in Grund zu legen.
163. Eine Figur auf dem Felde in zwei Theile zu zerlegen.
164. Eine Figur in mehrere Theile zu zerlegen.
165. Eine Figur zu copiren.
166. Den Flächeninhalt einer Figur zu berechnen.

Die rechnende Dreieckslehre.

167. Begriff der rechnenden Dreiecks-Lehre.
168. Jedem Peripherie-Winkel im Kreise gehört eine gewisse Sehne zu.
169. Folgerungen hieraus.
170. Die drei Seiten eines Dreiecks als Sehnen der ihnen gegenüberliegenden Winkel.
171. Die Sehnen als das Maaß der Winkel.
172. Begriff und Darstellung der Sehnentafel.
173. Die Sehnen gleicher Winkel in Kreisen von verschiedenen Durchmessern stehen im geraden Verhältnisse dieser Durchmesser. Unveränderlichkeit dieses Verhältnisses.
174. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten, wie die Sehnen der ihnen entgegenstehenden Winkel.
175. Bei den Auflösungen der rechnenden Dreiecks-Lehre muß wenigstens eine Seite des Dreiecks gegeben seyn.
176. Uebergang zu den wirklichen Berechnungen.
177. Angabe der möglichen Fälle bei rechtwinkeligen Dreiecken.
178. Aus der Hypotenuse und einem spitzen Winkel das Uebrige zu finden.
179. Aus einer Cathete und einem spitzen Winkel das Uebrige zu finden.
180. Aus der Hypotenuse und einer Cathete das noch Fehlende zu finden.
181. Aus den beiden Catheten das noch Fehlende zu finden.
182. Die Fälle zu bestimmen, welche bei den gleichschenkeligen Dreiecken Statt finden können.

183. Auflösung dieser Fälle.
184. Entwickelung der Fälle, welche bei Dreiecken überhaupt eintreten können.
185. Aus einer Seite und zwei Winkeln die fehlenden Stücke zu finden.
186. Aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher der einen gegenübersteht, das Uebrige zu finden.
187. Aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel das Uebrige zu finden.
188. Aus drei gegebenen Seiten die drei Winkel zu finden.
189. Die Entfernung zweier Orte durch Hülfe der Sehnentafel zu berechnen, wenn solche nicht unmittelbar gemessen werden kann.
190. Dieselbige Aufgabe unter andern Voraussetzungen.
191. Eben diese Aufgabe noch auf andere Weise.
192. Anwendung der rechnenden Dreieckslehre auf das Höhenmessen.
193. Einen auf dem Papier gegebenen Winkel durch Hülfe der Sehnentafel zu messen.
194. Einen nach Graden und Viertels-Graden gegebenen Winkel durch Hülfe der Sehnentafel zu verzeichnen.
I. Tafel. Quadrat- und Cubickzahlen von 1 bis 100.
II. Tafel. Längenmaaße verschiedener Orte.
III. Tafel Flächenmaaße einiger Gegenden.

Anhang.

Das neue französische Maas.

Erklärung einiger Zeichen.

Allgemeine Bezeichnungen in der Mathematik sind folgende:

$=$ ist das Zeichen der Gleichheit zweier Größen.

$\sim$ das Zeichen der Aehnlichkeit.

$\cong$ das Zeichen der Congruenz.

$>$ bedeutet (nach der Oeffnung des Zeichens) größer; z. B. $4 > 3$ heißt: 4 ist größer als 3.

$<$ bedeutet (nach der Spitze des Zeichens) kleiner; als z. B. $7 < 10$ d. h. 7 ist kleiner als 10.

$+$ (plus) ist das Zeichen der Addition; $-$ (minus) das Zeichen der Subtraction; $\times$ bezeichnet die Multiplication; : d. h. zwei über einander stehende Puncte, oder auch eine gerade Linie zwischen zwei über einander stehenden Zahlen, bezeichnet die Division z. B. $8:2$ oder $\frac{8}{2}$ heißt soviel als 8 dividirt durch 2.

5^2 bedeutet die zweite Potenz von 5, oder das Quadrat; 5^3 die dritte Potenz von 5, oder den Cubus (Würfel) u. s. w.

$\sqrt{\ }$ bedeutet zweite oder Quadratwurzel; $\sqrt[3]{\ }$ dritte oder Cubikwurzel u. s. f.

$\measuredangle$ heißt Winkel, z. B. $\measuredangle$ abc ist der Winkel abc.

$\triangle$ bedeutet Dreieck, $\square$ Quadrat.

Erklärung nöthiger Vorbegriffe.

Die Mathematik oder Größenlehre ist jene Wissenschaft, welche die Größen und ihre verschiedene Arten bestimmen, vergleichen und messen lehrt.

Unter einer Größe versteht man dasjenige, was sich vermehren und vermindern läßt; z. B. eine Zahl, eine Linie, ein Gewicht, ein Körper u. s. w.

Da die Größen entweder unstetige, d. h. nicht unter sich zusammenhängende sind, wie die Zahlen, oder stetige, d. h. in ihren Theilen innigst zusammenhängend, wie die Linien, Flächen und Körper, so hat die Mathematik zwei Haupttheile, die Zahlenlehre, oder Arithmetik, und die Raumlehre, oder Geometrie. Jeder dieser Theile heißt rein oder theoretisch, wenn er sich nur mit diesen Größen an sich, angewandt oder practisch, wenn er sich mit wirklich in der Natur vorhandenen Größen beschäftiget.

1. Ein Punct ist, was keine Theile hat.

Anmerk. Für den Anfänger ist es meist schwer, sich etwas zu denken, was gar keine Theile haben soll. Doch wird es ihm bald gelingen, wenn er sich einen Begriff von der Linie machen lernt, deren Grenzen man Puncte nennt. Der Punct ist nichts Räumliches, nichts wirklich Vorhandenes, sondern etwas Negatives.

2. Eine Linie ist, was eine Ausdehnung in die Länge ohne alle Breite hat.

Anmerk. Man zieht eine Linie, wenn man z. B. die Spitze eines Bleistifts auf dem Papiere fortbewegt, wobei man auf die Breite des dadurch entstehenden Strichs nicht Rücksicht nimmt, sondern blos auf seine Ausdehnung in die Länge. Da wo diese Linie anfängt und aufhört, also an ihren Grenzen, muß man sich Puncte denken und folglich sagen: Puncte sind die Grenzen der Linien. Durch die Zusammenstellung mehrerer solcher Puncte kann keine Linie Statt finden. Eben so wenig läßt sich eine solche Linie oder ein Punct zeichnen; denn durch das Zeichen entstehen nur Bilder derselben.

3. Eine gerade Linie ist diejenige, deren Theilchen alle nach einer Gegend zu liegen; eine krumme Linie dagegen, deren Theilchen nicht alle nach einer Gegend, sondern nach unzählich vielerlei Gegenden zu liegen.

Anm. 1. Auch die kleinsten Theilchen der geraden Linie müssen nach einer Gegend zu liegen. Hierdurch wird die gerade Linie zur einfachsten unter allen, und wird allein gebraucht, um die Entfernung zweier Puncte von einander zu bestimmen. Im gemeinen Leben dienen die Elle, der Schuh, Zoll u. dergl. als gerade Linien zur Ausmessung aller Ausdehnungen in die Länge.

Anm. 2. Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so kann es nur in einem einzigen Puncte geschehen; auch können beide noch keinen Raum einschließen.

Anm. 3. In der Mathematik nimmt man die Ruthe = 10 Schuh, den Schuh = 10 Zoll und den Zoll = 10 Linien, an, und nennt diese Eintheilung das zehntheilige oder Decimalmaaß. Nach dem zwölftheiligen oder Duodecimalmaaß beste-

het die Ruthe aus 12 Schuh oder Fuß, der Fuß aus 12 Zoll 2c. und endlich nach dem sechzehntheiligen hat die Ruthe 16 Schuh, der Schuh 16 Zoll u. s. w. In Frankreich wurde ein besonderes Maaß, Meter genannt, eingeführt, welches beinahe 3 Pariser Fuß und 1 Zoll groß ist, oder genauer = 3 Fuß, 0 Zoll, 11,44 Linien.

4. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.

5. Eine ebene Fläche oder Ebene findet Statt, wenn zwischen jeden zwei Puncten auf derselben eine gerade Linie möglich ist, die ganz in die Ebene fällt. Eine krumme Fläche ist eine solche, auf welcher nirgends eine, auch noch so kleine, Ebene Statt hat. Die krummen Flächen sind entweder einfach gekrümmte, in welchen nach einigen Richtungen gerade Linien möglich sind, z. B. die Fläche einer Walze, eines Kegels; oder allseitig gekrümmte, in welcher nicht eine gerade Linie Statt finden kann, z. B. die Kugelfläche.

Anmerk. 1. Die Grenzen der Flächen sind Linien; theils gerade, theils krumme.

Anmerk. 2. Zwei gerade Linien, welche in der nämlichen Ebene liegen, und die Eigenschaft haben, daß sie, bei jeder Verlängerung zu beiden Seiten, sich niemals durchschneiden, werden Parallellinien, oder gleichlaufende Linien genannt.

6. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander, die in einer Ebene zusammenstoßen, ohne eine einzige auszumachen.

Anm. 1. Fig. 1. ist ein ebener Winkel; die Linien a b, a c heißen seine Schenkel und der Durchschnittspunct a heißt der Scheitel. Da der Scheitel gewissermaßen in der Mitte steht, so setzt man auch den ihn bezeichnenden Buchstaben zwischen die beiden andern, und so heißt dieser Winkel b a c oder c a b.

Anm. 2. Die Größe eines Winkels hängt nicht ab von der Länge seiner Schenkel, sondern von der Neigung derselben gegen einander, d. h. von der Größe ihrer Oeffnung; so ist also in Fig. 3. der Winkel a b c größer, als der Winkel c b d.

Uebrigens ist hier nur von geradlinigen Winkeln die Rede, oder solchen, deren Schenkel gerade Linien sind; denn es giebt auch krummlinige und gemischtlinige Winkel.

7. Scheitelwinkel entstehen, wenn die Schenkel des einen Winkels (in Fig. 2. des ∢ a c b) die rückwärts durch den Scheitel c verlängerten Schenkel des andern Winkels (d c e) sind.

Folglich sind a c b, d c e Scheitelwinkel; eben dieß sind auch die Winkel b c e, a c d.

8. Nebenwinkel sind solche, die einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und deren beide andere in einer geraden Linie nach entgegengesetzten Seiten liegen.

Anm. 1. Fig. 3. sind Nebenwinkel, nämlich a b c und c b d.

Anm. 2. Wenn eine gerade Linie auf der andern so steht, daß sie gleiche Nebenwinkel macht, so heißt sie senkrecht, perpendicular oder lothrecht. In Fig. 4 ist ∢ m n o = ∢ o n p also ist o n senkrecht auf m p; aber eben so gut ist p n

und mn senkrecht auf on, weil on sich über n hinaus verlängern läßt und dann derselbe Fall eintritt. Die Winkel mno und onp heißen, weil sie als Nebenwinkel gleich sind, rechte Winkel. Bei rechten Winkeln steht also jeder Schenkel senkrecht auf dem andern. Uebrigens bezeichnet man den rechten Winkel gewöhnlich durch R.

Anm. 3. In Figur 3. sind die Nebenwinkel einander nicht gleich; sie heißen deßwegen schiefe Winkel. Ein schiefer Winkel, der wie ∢ abc, größer ist als ein rechter, heißt ein stumpfer und, wenn er kleiner ist als ein rechter, wie ∢ cbd, ein spitzer Winkel.

9. Eine Figur heißt eine von allen Seiten begrenzte Fläche. Hier ist nur von ebenen Figuren die Rede, welche entweder geradlinige, krummlinige oder gemischtlinige seyn können, nachdem ihre Umfangslinien entweder lauter gerade Linien sind, oder nachdem der Umfang aus einer krummen Linie, oder aus geraden und krummen Linien besteht.

10. Ein Kreis ist eine von einer einzigen krummen Linie umgrenzte Ebene. Er entsteht, wenn eine gerade Linie (in Fig. 5. die Linie cd) sich so lange in einer Ebene um einen festen Endpunct bewegt, bis sie wieder in die erste Lage kömmt. Der feste Endpunct c heißt der Mittelpunct des Kreises oder das Centrum; die Linie cd ist der Halbmesser oder Radius, de aber der Durchmesser oder Diameter; der Weg, das heißt die

krumme Linie dhlgefd, welchen der Endpunct d der Linie cd beschreibt, heißt der Umfang oder die Peripherie. Eine gerade Linie (wie gh) von einem Punct der Peripherie bis zum andern, welche nicht durch den Mittelpunct geht, heißt Sehne oder Chorde. Eine gerade Linie, welche den Kreis ausserhalb in einem Puncte berührt, heißt Tangente, wie hier me. Ein Stück der Kreisfläche hlgh zwischen der Sehne hg und einem Stück der Peripherie hlg (einem Kreisbogen) heißt Kreisabschnitt; aber ein Stück der Kreisfläche fcef zwischen zwei Halbmessern ce und cf und einem Kreisbogen fe heißt Kreisausschnitt.

Anmerk. Alle Halbmesser und folglich auch alle Durchmesser eines und desselben Kreises, oder gleicher Kreise, sind einander gleich.

11. Eine geradlinige Figur, welche von drei geraden Linien als Seiten eingeschlossen ist, heißt ein geradliniges Dreieck, eine vierseitige ein Viereck, und wenn sie mehr als vier Seiten hat, ein Vieleck oder Polygon.

Anmerk. Ein reguläres Vieleck wäre ein solches, das von lauter gleichen Seiten eingeschlossen ist.

12. Die Dreiecke werden eingetheilt 1. in Bezug auf ihre Seiten, in gleichschenklige (Fig. 7.) gleichseitige (Fig. 6.) und ungleichseitige (Fig. 8.) und 2. in Ansehung ihrer Win-

kel in rechtwinklige (Fig. 9.), stumpfwinklige (Fig. 10.) und spitzwinklige (Fig. 6. 7.)

Anmerk. 1. Auch giebt es krummlinige und gemischtlinige Dreiecke.

Anmerk. 2. Bei gleichschenkligen Dreiecken sind nur zwei Seiten einander gleich; bei gleichseitigen sind sie alle und bei ungleichseitigen ist keine Seite der andern gleich. Rechtwinklige Dreiecke haben einen rechten, stumpfwinklige einen stumpfen und spitzwinklige haben drei spitze Winkel.

13. Auch bei den Vierecken wird auf die Seiten und Winkel Rücksicht genommen. Ein Quadrat ist ein gleichseitiges und rechtwinkliges Viereck; (Fig. 11.) ein Rechteck (Oblongum) ist zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig; (Fig. 12.) ein Rhombus (Raute) ist gleichseitig aber schiefwinklig (Fig 13.); ein Rhomboid, wenn die gegenüberstehenden Seiten gleich und die Winkel schief sind. Jede andere vierseitige Figur heißt Trapez, und zwar Paralleltrapez, wenn die zwei gegenüberstehenden Seiten parallel, aber ungleich sind.

14. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten parallel sind. Auch sind diese gegenüberstehenden Seiten, so wie die gegenüberliegende Winkel paarweise einander gleich.

15. Figuren sind congruent oder decken einander, wenn sie so in einander gelegt werden

können, daß die Grenzen der einen ganz in die Grenzen der andern fallen.

Forderungen.

Anmerk. Unter Forderungen versteht man hier Sätze, welche verlangen, daß etwas geschehen soll, was so einfach ist, daß man keine besondere Anweisung dazu nöthig hat.

16. Man soll von einem gegebenen Puncte nach dem andern eine gerade Linie ziehen; oder mit andern Worten: es sollen zwei Puncte durch eine gerade Linie mit einander verbunden werden.

17. Eine gegebene gerade Linie soll an einer, oder an beiden Seiten beliebig verlängert werden.

18. Man soll aus einem gegebenen Puncte mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis beschreiben.

Da die beiden Spitzen des Zirkels (d. h. des Instruments, womit man gewöhnlich Kreise beschreibt,) immer die Endpuncte einer geraden Linie vorstellen, und dieselben bald nahe bald ferne von einander gestellt werden können, so setze man, um dieser Aufgabe practisch Genüge zu leisten, die eine dieser Spitzen in den gegebenen Punct, eröffne den Zirkel nach Verhältniß des Halbmessers, und beschreibe mit der andern Spitze die Peripherie des Kreises.

Grundsätze.

Anmerk. Grundsätze oder Axiome werden jene Sätze genannt, welche etwas behaupten, was

so einleuchtend ist, daß es keines besondern Beweises bedarf.

19. Raum, Größen, d. h. Linien, Winkel, Flächen, Körper, die einander decken, sind einander gleich, aber nicht umgekehrt.

20. Gerade Linien und Winkel, die gleich sind, können so in einander gelegt werden, daß sie einander decken.

21. Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei congruente Stücke, die Halbkreise heißen.

22. Gleiches zu Gleichem addirt, gibt Gleiches.

23. Gleiches von Gleichem subtrahirt, läßt Gleiches übrig.

24. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, bringt Gleiches zum Producte hervor.

25. Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt Gleiches zu Quotienten.

26. Das Ganze ist größer als ein Theil, oder einige seiner Theile zusammengenommen.

27. Wenn jede von zwei Größen der nämlichen Dritten gleich sind, so sind sie alle einander gleich.

28. Von gleichen Dingen läßt sich, der Größe unbeschadet, eins fürs andere setzen.

29. Alle rechte Winkel decken einander.

30. Zwischen zwei Puncten ist nur eine einzige gerade Linie möglich, aber

31. Unzählig viele krumme, und

32. Unendlich viele Winkel-Linien.

Die Congruenz der Dreiecke.

33. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Es sey Figur 6. die Linie ab gegeben. Man beschreibe mit derselben, als einem Halbmesser, um a einen Kreis, eben so um den Punct b, so werden die zwei Kreise sich schneiden. Von diesem Durchschnittspunct, z. B. bei c, werden gerade Linien nach a und b gezogen.

Da die drei Seiten des Dreiecks abc Halbmesser gleicher Kreise sind, so sind sie einander gleich. (10. Anmerk.)

34. Wenn in einem Dreieck zwei Seiten und der davon eingeschlossene Winkel gleich sind zwei Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel eines andern Dreiecks, so decken die Dreiecke einander, und die beiden übrigen Seiten sind einander gleich, so wie auch jeder der zwei andern Winkel seinem zugehörigen gleich ist.

Es sey Figur 15. $ac = df$, $ab = de$ und $\measuredangle a = \measuredangle d$, so lege man diese Winkel und Seiten in der gehörigen Ordnung in einander. Der Punct b wird dann in den Punct e und c in f zu liegen kommen. Daher wird auch die dritte Linie bc in ef fallen (30).

35. Wenn in einem Dreieck eine Seite und die daran liegenden beiden Winkel gleich sind einer Seite und den daran liegenden beiden Winkeln

eines andern Dreiecks, so sind beide Dreiecke congruent.

Es sey Fig. 15. bc = ef, ∢ abc = ∢ def und ∢ acb = ∢ dfe. Man lege beide Dreiecke mit diesen gleichen Stücken in einander, so wird ed auf ba, fd auf ca fallen und sind jetzt nicht mehr als vier, sondern als zwei gerade Linien zu betrachten, die sich nur in einem Puncte schneiden können (3. Anmerk. 2). Es decken sich also die beiden Dreiecke.

36. In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

In Figur 7 heiße de die Grundlinie. Stellt man sich ein andres, diesem congruentes Dreieck DEF vor, (welches sich der Schüler leicht neben das Dreieck def zeichnen wird), worin ∢ f = ∢ F, fd = FD, FE = fe (34) sey, so ists gleichviel, ob hier die gleichnamigen Seiten auf einander kommen oder nicht; die Dreiecke müssen sich dennoch decken, folglich muß alles in gehöriger Ordnung in beiden gleich seyn; daher sind auch die Winkel an der Grundlinie gleich.

37. In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel einander gleich.

Da ein solches sich von jeder Seite als ein gleichschenkliges Dreieck darstellt, so läßt sich die Gleichheit aller drei Winkel hieraus folgern.

38. Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich

sind, so sind auch die denselben gegenüber stehenden Seiten gleich.

Denkt man sich wieder ein Dreieck DEF, welches dem Dreieck def Fig. 7. congruent wäre und legt die gleichen Winkel d = D, e = E verkehrt auf einander, so werden sie sich ebenfalls decken, wenn de = DE, ∢ e = ∢ E und ∢ d = ∢ D. Es liegt hier ∢ e auf ∢ D und ∢ d auf ∢ E.

Anmerk. Wenn also in einem Dreieck drei Winkel gleich sind, so sind auch die drei Seiten gleich und das Dreieck ist ein gleichseitiges.

39. Wenn in einem Dreieck die drei Seiten einzeln genommen gleich sind den drei Seiten eines andern Dreiecks, so müssen beide Dreiecke congruent seyn.

Wenn man zwei solche Dreiecke mit zwei ihrer gleichen Seiten an einander legt, so sind dreierlei Fälle möglich.

1. Fall. Wenn Fig. 18. die beiden Dreiecke mnp und mpo, mit ihrer Seite mp an einander gelegt, zusammen ein gleichschenkliges Dreieck nmo bilden. Denn hier ist mn = mo, mp = mp und np = po. Weil nun ∢ mno = ∢ mop (36) und nach der Annahme die an diesen Winkeln liegenden Seiten des einen Dreiecks mop den am gleichen Winkel liegenden Seiten des andern Dreiecks

mnp gleich sind, so werden beide Dreiecke congruent seyn. (34).

2. Fall. Wenn Figur 16. zwei Dreiecke ade und bde mit ihrer längsten Seite de an einander liegen, so daß ad = db, ae = eb und de = de, so ziehe man die Hülfslinie ab. Dadurch entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke adb und aeb mit den an der gemeinschaftlichen Grundlinie ab gleichen Winkeln (36) diese zusammen addirt (22) machen, daß ∢ dae = ∢ dbe. Die daran liegenden Seiten sind, nach dem Angenommenen, auch in beiden Dreiecken ade und dbe gleich, folglich diese beiden Dreiecke congruent (34).

3. Fall. Wenn Fig. 17. die zwei Dreiecke adc und bdc mit ihrer kleinsten Seite dc an einander liegen, so ziehe man die Hülfslinie ab, wodurch, wegen der Gleichheit aller Seiten, die beiden gleichschenkligen Dreiecke abd und abc entstehen; daher ist ∢ dab = ∢ dba (36) eben so ∢ cab = ∢ cba; daher auch ∢ dac = ∢ dbc (23). Weil nun die diese letzten Winkel einschließenden Seiten in beiden Dreiecken gleich sind, so sind die Dreiecke adc und bdc selbst congruent (34).

40. Einen jeden gegebenen Winkel zu halbiren.

Es sey Fig. 16. der ∢ adb, welcher in die zwei gleichen Winkel ade und edb zerlegt werden soll. Nachdem man die Schenkel da und db gleich

gemacht hat, wird mit gleichen Halbmessern a c = b c in e ein Durchschnitt gebildet, und hierauf die Theilungslinie d e gezogen. Wegen der Congruenz beider Dreiecke (39) müssen auch die Winkel bei d gleich seyn.

41. Eine jede gegebene gerade Linie zu halbiren.

Es werde in dem gleichschenkligen Dreieck m n o, Fig. 18, der Winkel m halbirt (40), so sind die Dreiecke m n p und m o p congruent (34) und die Linie n o muß bei p in zwei gleiche Theile getheilt seyn.

42. Auf einer gegebenen geraden Linie durch einen in ihr gegebenen Punct ein Perpendikel zu errichten.

Durch den Punct p. Fig. 18. wird ein Perpendikel p m so aufgerichtet, daß man zuerst p o = p n, dann von o und n mit gleichen Halbmessern einen Durchschnitt in m macht, und nun von p nach m eine gerade Linie zieht. Hier entstehen die congruenten Dreiecke m o p und m n p, (39), wodurch die Nebenwinkel bei p gleich werden, und somit ist p m perpendiculär. (8. Anmerk 2).

Anmerk. Hieraus erhellt, daß für einen gegebenen Punct auf einer Linie nur ein einziges Perpendikel möglich ist. Eben dieses Perpendikel gibt dann zugleich die Entfernung jenes Puncts von der Linie an.

43. Auf eine gegebene gerade Linie von einem ausser ihr gegebenen Punct ein Perpendikel zu fällen.

Wenn, Figur 18, m der gegebene Punct und n o die Linie wäre, so werden aus m mit gleichen Halbmessern bei n und o oder auf jeden andern zwei Puncten der Linie Durchschnitte gemacht und die Linien m n = m o gezogen. Wird hierauf der Winkel m halbirt, so gibt diese Halbirungslinie m p das verlangte Perpendikel wegen der Congruenz beider Dreiecke m n p und m o p (34). (8. Anmerk. 2).

44. Zwei Nebenwinkel sind immer zwei rechten Winkeln gleich.

Wenn diese Nebenwinkel unter sich gleich sind, so sind sie ohnedies schon zwei rechte Winkel. Sind sie aber ungleich, so errichte man, Fig. 19, aus ihrem gemeinschaftlichen Scheitel ein Perpendikel c e auf a b, so wird ∢ a c e = ∢ e c b. Weil aber ∢ e c b = ∢ e c d + ∢ d c b, so ist auch ∢ a c e = ∢ e c d + ∢ d c b (28) und weil ∢ a c e + ∢ e c b = zwei Rechten, so ist auch ∢ a c e + ∢ e c d + ∢ d c b = zwei Rechten.

Es sind daher alle Winkel um einen Punct herum auf einer geraden Linie = 2 R.

Anmerk. Aus Fig. 2. ergibt sich ferner, daß, wenn ∢ a c b + ∢ b c e = 2. R und ∢ e c d + ∢ d c a = 2. R also auch die Winkel a c b + b c e + e c d + d c a = 4 R. seyen, welches man gewöhnlich so ausdrückt: alle Winkel um einen Punct herum sind vier rechten Winkeln gleich.

45. Zwei gerade, sich schneidende, Linien bilden gleiche Scheitelwinkel.

Weil nämlich Fig. 2. acb + bce = 2R. und acd + acb = 2R, so ist acb + bce = acb + acd (27). Wenn man von beiden acb wegnimmt, so bleibt (23) ∢ bce = ∢ acd.

46) In jedem Dreiecke ist, wenn man eine seiner Seiten verlängert, der äußere Winkel größer als jeder der ihm gegenüber liegenden innern, der nicht ein Nebenwinkel von ihm ist.

Im Dreieck abe, Fig. 20, sey bei ein äußerer Winkel. Nachdem man be in c und ae in d halbirt hat, ziehe man ac = cg und bd = df, ferner fe und ge, so sind wegen der Scheitelwinkel und der daran liegenden gleichen Seiten △ ceg ≌ △ cba (34), und daher auch ∢ ceg = ∢ cba, aber ∢ ceg < bei (26). Aus demselben Grunde ist auch △ def ≌ △ dab (34) daher ∢ def = ∢ dab = ∢ gei (45) und also ∢ dab < ∢ bei, weil ∢ gei < ∢ bei (26).

47. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel und eine Seite, die einem derselben gegenüber liegt, zweien Winkeln und einer solchen gegenüber liegenden Seite eines andern Dreiecks gleich sind, so sind beide Dreiecke congruent.

Es sey, Figur 15, ∢ bac = ∢ edf und ∢ bca = ∢ efd die Seite ab = de so ist auch ac = df und △ bac ≌ △ edf (34). Denn gesetzt, es wären ac, df ungleich, und also eine davon, etwa ac, größer so daß df = ag. Da nun ∢ bca = ∢ efd so wäre auch ∢ bga = ∢ efd

$= \measuredangle bca$, welches aber gegen das Vorige ist (46). Eben so wenig kann $ac < df$ seyn. Folglich ist $ac = df$ und die Dreiecke abc und def decken sich (39).

Anmerk. Die bisherigen vier Sätze von der Congruenz der Dreiecke (34), (35), (39), (47) gehören zu den wichtigsten und folgereichsten der ganzen Geometrie. Man sagt daher, daß die Natur eines Dreiecks bestimmt sey, wenn folgende Stücke von ihm gegeben sind:

1) entweder ein Winkel und die denselben einschliessenden zwei Seiten; oder

2) eine Seite und die daranliegenden zwei Winkel; oder

3) alle drei Seiten; oder

4) zwei Winkel und eine Seite, die einem der gegebenen Winkel gegenüber liegt.

48. In jedem Dreiecke steht der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Wenn im Dreieck abd, Fig. 21, $ad > ab$, so mache man $ac = ab$, so ist $\measuredangle abc = \measuredangle acb$ (36). Da nun $acb > adb$ (46), so ist auch $\measuredangle abc > \measuredangle adb$ folglich auch $\measuredangle abc + \measuredangle cbd > \measuredangle adb$ (26), das ist, $\measuredangle abd > \measuredangle adb$.

49. In jedem Dreiecke steht dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Denn wären die Seiten gleich, so wären es auch die ihnen gegenüberstehenden Winkel (37) und wenn die dem größern Winkel gegenüberstehende Seite die kleinere seyn sollte, so wäre das Vorige

(48) falsch, folglich muß diese Seite die größere seyn. Man vergleiche dies mit Fig. 21.

50. In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen genommen immer größer als die dritte.

Im Dreieck abc, Fig. 22, nehme man bd = bc und ziehe dc, so ist ∢ bcd = ∢ bdc (36) weil nun ∢ acd > ∢ bcd, so ist auch ∢ acd > ∢ bdc (28) folglich ad > ac (49) und da ad = ab + bc, so ist auch ab + bc > ac.

51. Man soll aus drei gegebenen Linien, wovon (nach 50) je zwei zusammen genommen größer seyn müssen als die dritte, ein Dreieck beschreiben.

Man nehme eine der drei Linien als Grundlinie an, beschreibe aus ihrem einen Endpuncte mit der zweiten einen Kreisbogen oberhalb oder unterhalb derselben, und mit der dritten aus ihrem anderen Endpuncte auch einen Kreisbogen, welcher jenen oberhalb oder unterhalb schneidet; verbinde endlich diese Durchschnittspuncte und die Endpuncte der Grundlinie durch zwei gerade Linien, so entstehen zwei congruente Dreiecke. — Eine Zeichnung wird dieses erläutern.

52. Man soll an eine gegebene Linie, worin ein beliebiger Punct angenommen worden ist, einen gegebenen Winkel legen.

Nachdem man sich zuvor den gegebenen Winkel, z. B. Fig. 15, ∢ bac in ein beliebiges Dreieck wie △ bac gebracht hat, beschreibe man ein diesem congruentes Dreieck def (39) so daß de = ab, df

= a c und e f = b c gemacht wird, so ist auch ∢ e d f = ∢ b a c. (39).

Anmerk. 1. Es gibt noch andere Mittel, einen gegebenen Winkel aufs Papier an jeden beliebigen Punct zu setzen, z. B. mit Hülfe eines Transporteurs, wovon unten die Rede seyn wird.

Anmerk. 2. Wenn, Fig. 24, die geraden Linien a c und f d von der dritten geraden m r in b und e geschnitten werden, so heißen die Winkel a b e und b e d, ferner die ∢ c b e und b e f die Wechselwinkel; der ∢ m b c heißt ein äußerer, b e d sein innerer; eben so sind m b a, n e f, n e d äußere Winkel, welchen die innern Winkel b e f, e b a, e b c zugehören. Endlich werden die Winkel c b e und b e d, auch die Winkel a b e und b e f die beiden innern Winkel genannt.

53. Zwei gerade Linien, welche von einer dritten so durchschnitten werden, daß die Wechselwinkel gleich sind, sind parallel.

Es sey, Fig. 24, ∢ a b e = ∢ b e d. Wenn die Linien a c, f d bei gehöriger Verlängerung sich schneiden würden, daß z. B. c mit d zusammen träfe wie Fig. 23. in d, so wäre ∢ a b e > ∢ b e d, weil ∢ a b e als äußerer Winkel des Dreiecks b e d erscheint (46). Eben dieß würde auf der entgegengesetzten Seite Statt finden und wäre gegen das Angenommene, daß ∢ a b e = ∢ b e d ist. Folglich sind a c, f d parallel. (5. Anm. 2.)

Anmerk. Weil Anfänger öfters die Wechselwinkel sich nicht deutlich denken, so bemerke ich, daß sie sich

dieselben immer am besten in der Figur eines lateinischen Z vorstellen werden.

54. Zwei gerade Linien sind parallel, wenn eine dritte sie schneidende Linie den äußern mit dem an derselben Seite liegenden innern Winkel gleich macht.

Es sey, Figur 24, $\sphericalangle\, mbc = \sphericalangle\, bed$, so ist auch $\sphericalangle\, abe\ (= mbc)$ (45) $= \sphericalangle\, bed$. Folglich (53) ac und fd parallel.

55. Zwei gerade Linien sind parallel, wenn die an einer Seite liegenden beiden innern Winkel zusammen zwei rechten Winkeln gleich sind.

Wenn Figur 24 $\sphericalangle\, cbe + \sphericalangle\, bed = 2\,R$ und auch $\sphericalangle\, mbc + \sphericalangle\, cbe = 2\,R$ (44) so ist $\sphericalangle\, mbc = \sphericalangle\, bed$ (23) folglich sind ac, fd parallel (54).

56. Wenn zwei gerade Linien parallel sind, so macht eine dritte sie schneidende die Wechselwinkel gleich.

Wenn, Fig. 24, ac und fd parallel sind, und die Wechselwinkel abe und bed wären ungleich, so setze man, es sey, wie Fig. 23, $\sphericalangle\, abe > \sphericalangle\, bed$. Wenn man nun hier $\sphericalangle\, ebg = \sphericalangle\, bed$ macht und die gerade Linie gbh zieht, so ist diese gh mit fd gleichlaufend, d. h. wenn man gh noch so weit über h, und fd noch so weit über d verlängert, so werden diese Linien sich niemals durchschneiden. Nun fällt die Linie bn zwischen bh und ed und es folgt aus der Neigung der Linien bn

und e m unwidersprechlich, daß beide, hinlänglich verlängert, einmal in d zusammentreffen werden. Daher wären die Linien a b und f e nicht mehr parallel, wie doch angenommen worden ist.

Anmerk. Die gelehrten Streitigkeiten über diesen Satz gehören nicht in diese Elementarschrift.

57. Wenn zwei gerade Linien parallel sind, so macht eine dritte sie schneidende Linie den äußern Winkel dem an derselben Seite gegenüber liegenden innern Winkel gleich.

Denn, Fig. 24, ∢ mbc = ∢ abe (45). Da nun bei den parallelen Linien ac, fd, die Wechselwinkel ∢ abe = ∢ bed (56), so ist auch ∢ mbc = bed (28).

58. Wenn zwei gerade Linien parallel sind, so sind die beiden an einer Seite liegenden innern Winkel = 2 R.

In Figur 24. sind bei den parallelen Linien ac, fd, die Winkel mbc und bed gleich (57). Weil nun ∢ mbc + ∢ cbe = 2 R (44) so ist auch ∢ cbe + ∢ bed = 2 R (28).

59. Wenn zwei gerade Linien mit einer dritten parallel laufen, so sind sie einander selbst parallel.

In Fig. 25. sey ad und ge parallel, daher ist ∢ abc = ∢ bce (56). Aber auch hf, ge sey parallel, also auch ∢ gci = ∢ cif (56), daher ist auch ∢ cif = ∢ abc (28) das ist ∢ bif = ∢ abi, daher auch ad, hf parallel. (53).

60. Durch einen gegebenen Punct eine gerade

Linie zu ziehen, welche mit einer gegebenen parallel ist.

Es sey Fig. 24. fd gegeben und der Punct b. Man ziehe von fd eine beliebige gerade Linie nach b, hier eb, nehme ∡ deb = ∡ eba (52) und verlängere ab, so ist ac mit fd parallel (53).

Anmerk Vermittelst eines sogenannten Winkelhakens und eines gewöhnlichen Lineals werden parallele Linien practisch gezogen; wenn man z. B. bei Figur 24. den Winkelhaken an fd so anlegte, daß der rechte Winkel etwa bei e stünde und dicht daran ein anderes Lineal brächte, daß es hier nach ac zu gerichtet wäre, hierauf an diesem den Winkelhaken fortrückte bis zum Puncte b und durch diesen jetzt die parallele Linie ac zöge. Wenn der Winkelhaken richtig gearbeitet ist, so ist diese Methode sehr einfach und bequem. In der Folge (81 Zus. 2.) wird gezeigt werden, wie man die Richtigkeit eines Winkelhakens prüft.

61. Der äußere Winkel eines Dreiecks, der durch die Verlängerung einer Seite desselben entsteht (man nennt ihn den Aussenwinkel) ist den beiden innern Winkeln zusammen genommen gleich, die nicht seine Nebenwinkel sind.

Man ziehe, Figur 26, durch c die mit ab parallele Linie cd (60), so ist ∡ bac = ∡ dce und ∡ bcd = ∡ abc (57 und 56), daher ∡ bac + ∡ abc = ∡ bcd + ∡ dce = ∡ bce.

62. Die drei innern Winkel eines jeden Dreiecks sind zusammengenommen zweien rechten Winkeln gleich.

In Figur 26. ist ∢ bce + ∢ bca = 2 R (44) aber ∢ bce = ∢ bcd + ∢ dce = ∢ bac + ∢ abc (61) daher ∢ bac + ∢ abc + ∢ bca = 2 R (28).

Anmerk. Hieraus läßt sich beurtheilen, wie vielerlei Arten von Dreiecken in Rücksicht der Winkel möglich seyen. Ein Dreieck kann folglich nur einen einzigen rechten oder einen stumpfen Winkel, wohl aber drei spitze Winkel haben.

63. Gerade Linien, welche die Endpuncte gleicher und paralleler Linien mit einander verbinden, sind selbst parallel und gleich.

Wenn, Figur 27, ac, bd gleich und parallel sind, und man zieht bc, ab, cd, so ist ∢ bca = ∢ cbd, ac = bd, bc = bc und also △ abc ≌ △ cbd (34) daher ab = cd und ∢ bcd = ∢ cba, daher auch ab, cd parallel (53)

Anmerk. Auf diesem Satze beruht die Möglichkeit der Parallelogramme und ihrer verschiedenen Arten, welche sich nun streng nachweisen lassen. Der Anfänger mag sich in ihrer Construction üben. — Eine Linie wie bc, Fig. 27. heißt die Diagonale des Parallelogramms.

64. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel einander gleich.

Figur 27. abdc sey ein Parallelogramm (14). Weil nun ∢ abc = ∢ bcd und ∢ bca = ∢ cbd (56) und bc = bc, so ist △ abc ≌ △ cbd (35) und ac = bd, ab = cd, aber auch ∢ bac = ∢ bdc. Denn bei congruenten Dreiecken sind die Winkel und Seiten in gehöriger Ord-

nung genommen einander gleich. Ferner ∢ acb + ∢ bcd = ∢ abc + ∢ cbd (22), oder ∢ acd = ∢ abd.

65. Eine Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. Auch kann man aus zwei congruenten Dreiecken, durch gehörige Zusammensetzung, ein Parallelogramm bilden. Sind die Dreiecke ungleichseitig, so lassen sich drei Parallelogramme bilden, welche verschiedene Gestalten, aber immer einerlei Größe haben.

bc sey Figur 27. die Diagonale. Der Beweis ist der vorige (64).

66. Parallelogramme auf einerlei Grundlinie und zwischen einerlei Parallelen sind einander gleich.

Man unterscheide drei Fälle:

1. Fall. Die Seite bd des zweiten Parallelogramms Figur 28. sey Diagonale des ersten. Hier ist adcb und decb zwischen den Parallelen ae, bc; ferner ist bc beider gemeinschaftliche Grundlinie. Man vergleiche △ adb mit △ dce, so ist ab = dc (64) und weil ad = bc, bc = de (64) so ist auch ad = de (28), bd = ce (64), daher △ adb ≌ △ dce (39). Zu beiden kommt △ dbc hinzu, daher △ adb + △ dbc = △ dbc + dce (22). Das ist: Parallelogramm adcb = Parallelogramm decb.

2. Fall. Figur 30. Hier fällt die Seite mh des zweiten Parallelogramms außerhalb des ersten,

fglm, hklm sind zwischen gleichen Parallelen fk, lm und lm ist gemeinschaftliche Grundlinie. fg = lm = hk (64) (28), fg + gh = hk + gh (22), ferner fm = gl, mh = lk (64), daher △ fhm ≌ △ gkl (39). Man nehme von beiden das △ ghi, so ist fgim = hilk (23) und setze hinzu △ mil, so ist fglm = hklm (22).

3. Fall. Die Seite sq des zweiten Parallelogramms fällt ganz innerhalb des ersten. Figur 30. orts, qpts sind zwischen den Parallelen op, st. or = st = qp (64. 28.) or — qr = qp — qr (23) also oq = rp, ferner os = rt und qs = pt (64). Daher △ oqs ≌ △ rpt. Zu beiden setze man qrts, so ist (22) orts = qpts.

67. Dreiecke auf einerlei Grundlinie und zwischen einerlei Parallelen sind einander gleich.

Es seyen Figur 31. △ ade und △ bde auf einerlei Grundlinie de und zwischen den Parallelen ac, de. Man ergänze diese Dreiecke zu Parallelogrammen (65), indem man zu dem △ ade das ihm congruente △ abe (34) und zu △ dbe das △ bec hinzusetzt. Es sind aber die Parallelogramme abed und bced gleich (66) folglich auch ihre Hälften, die Dreiecke ade und bde (23).

Anmerk. 1. Man drückt diesen und den vorhergehenden Satz auch so aus: Parallelogramme so wie auch Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind

gleich. Man versteht nämlich unter der Höhe eines Parallelogramms ein Loth von dessen einer Seite auf die ihr gegenüberliegende Parallele. Bei dem Dreiecke ist die Höhe das Perpendickel von dessen Spitze zur gegenüberstehenden Grundlinie, oder auf ihre Verlängerung.

Anm. 2. Es läßt sich folglich auch aus zwei und mehrern Dreiecken von gleichen Grundlinien und Höhen ein einziges bilden, dessen Inhalt dem Inhalt jener zusammen gleich ist, wenn man die Höhe beibehält und die Grundlinie doppelt oder so oft nimmt, als gleiche Dreiecke vorhanden sind.

68. Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck auf einerlei Grundlinie und zwischen einerlei Parallelen liegen, so ist das Parallelogramm doppelt so groß, als das Dreieck.

Wenn, Figur 32, das △ edc und das Parallelogramm abde einerlei Grundlinie ed und zwischen denselben Parallelen ac, ed liegen, so theile man das Parallelogramm abde durch die Diagonale ad in zwei congruente Dreiecke (65). Da nun △ ade = △ edc (67.), und Parallelogramm abde = 2 △ ade, so ist abde auch = 2 △ edc (28).

69. Man soll ein Parallelogramm, worin sich ein gegebener Winkel befindet, einem gegebenen Dreiecke gleich machen.

Der ∢ cfe und das △ abe, Fig. 33, seyen gegeben. Man halbire die Grundlinie ae (41) des △ abe in f, daß af = fe, ziehe bd parallel mit

ae (60) durch den Punct b, hierauf mache man cd = fe und ed parallel der fc; da nun △ afb = △ fbe (67) und Parallelogramm cdef = 2 △ fbe (68) so ist auch Parallelogramm cdef = △ fbe + △ afb = △ abe (28).

70. In jedem Parallelogramme sind die Ergänzungen der um die Diagonale herumliegendeu Parallelogramme einander gleich.

Es sey, Fig. 34, ahge ein beliebiges Parallelogramm, ag dessen Diagonale, c ein willkührlicher Punct darin, ai mit eg und bf mit ae gleichlaufend, so ist Parallelogramm bhic = Parallelogramm dcfe. Denn es ist △ ahg = △ aeg, und △ abc = △ adc (65) weil di parallel mit ah und bf parallel mit ae, ferner △ cig = △ cfg (65) daher bhic = dcfe (23).

71. Man soll ein Parallelogramm in ein anderes verwandeln, das eine gegebene Seite hat.

Man verlängere die beiden Seiten hb und ic, Figur 34, des gegebenen Parallelogramms hbic. Wenn nun die gegebene Seite = ab wäre, so ziehe man ad parallel mit bc und verlängere beide Linien, eben so hi, bis diese die Verlängerung der Diagonale ac in g schneidet. Durch den Punct g ziehe man eine Parallele mit ah oder di. Auf solche Art entsteht das Parallelogramm ahge, in welchem dcfe das gesuchte Parallelogramm dem andern bhic gleich ist (70).

Anmerk. Der Anfänger thut sehr wohl, wenn er sich zur Erläuterung dieses Satzes auch schiefwinkelige Parallelogramme zeichnet.

Zus. Wenn außer der gegebenen Seite noch ein Winkel gegeben ist, so verwandle man in Fig. 34. den Winkel hbc des Parallelogramms hbci in den gegebenen, so wird derselbe immer dem ∢ bad und daher dem ∢ cde des Parallelogramms cdef gleich seyn (57).

72. Auf einer gegebenen geraden Linie und unter einem gegebenen Winkel ein Parallelogramm zu construiren, das einem gegebenen Dreieck gleich sey.

Man verwandle zuvor das gegebene Dreieck in ein Parallelogramm (69) und verfahre dann, wie zuvor ist gezeigt worden (71).

Anmerk. Auch die Auflösung dieser Aufgabe muß dem Anfänger durch gehörige Zeichnungen erläutert werden.

73. Ein Quadrat zu beschreiben, wozu eine Seite gegeben ist.

Es sey, Fig. 11, die Linie ab gegeben. Man errichte auf den Punct a ein Perpendikel (welches nach 42. dadurch geschehen kann, daß man die ba über a verlängert) mache ad = ab, ziehe durch d die dc parallel mit ab und eben so durch b die bc parallel mit ad, so ist abcd ein Parallelogramm, dessen Seiten einander gleich sind (64). Da aber wegen der parallelen Linien ab, dc der ∢ a +

$\sphericalangle d = 2R$ und $\sphericalangle a = 1R$, so ist auch $\sphericalangle d = 1R$, folglich das Parallelogramm auch rechtwinklig (13), daher ein Quadrat.

Anmerk. 1. Quadrate von bestimmter Größe dienen als Einheiten zur Bestimmung des Flächeninhalts der Figuren. Je nachdem die Seite des Quadrats ein Zoll, Schuh oder eine Ruthe lang ist, heißt das Quadrat selbst ein Quadratzoll, Quadratschuh, Quadratruthe. Hat die Grundlinie eines Parallelogramms einen, die Höhe fünf Zoll, so enthält das Parallelogramm selbst fünf Quadratzoll. Bei einer Grundlinie von 2 und einer Höhe von 5 Zoll hat es 10, bei einer Grundlinie von 3 und einer Höhe von 5 Zoll, hat es 15 Quadratzoll.

Anmerk. 2. Wenn daher das Maaß in der Grundlinie eines Rechtecks und in dessen Höhe ohne Rest enthalten ist, so stellt das Product beider Zahlen den Flächeninhalt des Rechtecks vor.

Anmerk. 3. Bei schiefen Parallelogrammen multiplicirt man das Maaß der Grundlinie mit dem Maaße der senkrechten Höhe (66.)

Anmerk. 4. Wenn das Maaß, z. B. der Fuß, nicht ganz genau in Grundlinie und Höhe enthalten ist, so bestimme man noch die Zolle. Es sey die Grundlinie $=$ 8 Fuß 4 Zoll (man schreibt $8'4''$) die Höhe $= 5'3''$, so ist der Inhalt $= 84 \times 53 = 4452$ Quadratzolle $= 44$ Quadr. Fuß, 52 Quadr. Zolle.

Anmerk. 5. Wegen (65) findet man den Inhalt der Dreiecke, wenn man das Maaß ihrer Grundlinien mit dem Maaße ihrer Höhen multiplicirt und das Product halbirt; oder das Maaß der halben Grundlinie mit dem Maaße der ganzen Höhe, oder umgekehrt, multiplicirt.

74. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite gleich den beiden Quadraten der ihn einschließenden Seiten zusammengenommen.

Es sey, Fig. 35, gcf das rechtwinklige Dreieck, gfih das Quadrat der Seite gf, die dem rechten Winkel gef gegenüber steht, cfed und cbag sind die Quadrate der den rechten Winkel gef einschliessenden Seiten. Man ziehe ek parallel mit der Linie gh; ferner die Linien af, ch, ci, gc so ist ∢fgh = ∢cga, und wenn ∢cgf zu beiden hinzu kömmt (22) ∢agf = ∢cgh, gc = ga, gf = gh, daher △agf ≌ △cgh (34). Da aber abcg = 2△agf und gmkh = 2△hgc, so ist abcg = gmkh (68). Eben so wird die Gleichheit der Dreiecke gfe und icf, so wie der Parallelogramme fcde und fmki bewiesen, so daß gmkh + fmki das ist gfih = abcg + fcde.

Anmerk. Man nennt gewöhnlich die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite die Hypotenuse, die beiden andern ihn einschliesenden die Catheten; den Lehrsatz selbst aber den Pythagorischen.

Zus. 1. Daher ist das Quadrat abcg die Differenz der Quadrate cfih und cdef; auch cdef die Differenz der Quadrate gfih und abcg.

Zus. 2. Auch ist es leicht, nach diesem Satze ein Quadrat zu verdoppeln, zu verdreifachen u. s. f., so daß das Doppelte und Dreifache wieder ein Quadrat ist.

Zus. 3. Auf gleiche Weise können mehrere gegebene Quadrate in ein einziges verwandelt werden, welches ihnen zusammengenommen gleich ist.

Zus. 4. Eine große Mannigfaltigkeit von Beweisen dieses wichtigen Satzes findet man in der Abhandlung: Der Pythagoräische Lehrsatz, auf zwei und dreisig verschiedene Arten bewiesen. Mainz, bei Kupferberg, 1819. 4to.

Vom Kreise.

75. Wenn im Kreise eine durch den Mittelpunct gehende gerade Linie eine Sehne halbirt, so schneidet sie dieselbe unter rechten Winkeln und steht folglich auf ihr senkrecht.

In Figur 36. gehe die Linie af durch den Mittelpunct c auf die Mitte e der Sehne bd. Da nun cb = cd (10), ce = ce und eb = ed, so ist △ bec ≌ △ dec (39); also sind auch die Winkel bei e gleich, und, weil sie Nebenwinkel sind, auch rechte (8); daher ae ein Perpendikel (8).

76. Wenn eine durch den Mittelpunct des Kreises gehende gerade Linie auf der Sehne senkrecht steht, so halbirt sie auch dieselbe.

Es sey, Figur 36, ae das Perpendikel; folglich sind bei e rechte Winkel, bc = cd, (10. Anmerk.) ∢ cbe = ∢ cde (36), ∢ ced = ∢ ceb (8); daher △ bec ≌ △ cde (47) und be = ed.

77. Wenn eine gerade Linie auf der Mitte der Sehne senkrecht steht, so geht sie, gehörig verlängert, durch den Mittelpunct des Kreises.

Gesetzt, sie ginge nicht durch den Mittelpunct und sey z. B. eg, so ziehe man ec. Hier ist ∢ ced = R (75). Allein da auch ∢ ged = R wäre, so müßte ∢ ced = ∢ ged seyn, was unmöglich ist, da eg zwischen ed und ec liegt.

78. Man soll durch drei Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis beschreiben.

Diese drei gegebenen Puncte seyen, Figur 37, a, b, c. Man verbinde sie durch die geraden Linien ab, bc; errichte auf deren Mitte m und n die Lothe mg und nh, so müssen sich diese einmal in o schneiden, weil $\measuredangle mno + \measuredangle nmo < 2R$ ist. Denkt man sich nun die geraden Linien oa, ob, oc, so ist, wegen $am = bm$, $\measuredangle amo = \measuredangle bmo$ und $mo = mo$, das $\triangle oma \cong \triangle omb$, folglich auch $oa = ob$. Eben so ist auch $\triangle onb \cong \triangle onc$ und $ob = oc$. Daher sind oa, ob, oc die Radien des Kreises, der durch a, b, und c geht.

79. Man soll durch einen gegebenen Punct der Peripherie eine Tangente ziehen.

Wenn, Figur 38, der Punct b der Peripherie gegeben ist, so ziehe man nach diesem den Halbmesser ab, auf den Punct b aber errichte man das Perpendikel bc, so wird ac größer als ab (49) seyn, und der Punct c muß ausserhalb des Kreises liegen. Daher hat die Linie bm nur den einen Punct b mit der Peripherie gemein und ist somit eine Tangente (10).

80. Ein Winkel am Mittelpuncte, welcher auf einerlei Bogen steht mit einem Winkel an der Peripherie, ist doppelt so groß als dieser.

Man unterscheide drei mögliche Fälle. Denn entweder fällt der Mittelpunct in einen Schenkel des Winkels an der Peripherie, Figur 39, oder

er fällt außerhalb, Figur 41, oder zwischen beide Schenkel, Figur 40.

1. Fall. Figur 39. ∢ dcb ist ein Winkel am Mittelpunct und ∢ dab ein Winkel an der Peripherie, ca = cb als Halbmesser; daher ∢ cab = ∢ abc (36). Weil aber ∢ dcb = ∢ cab + ∢ abc (46), so ist auch ∢ dcb = 2 ∢ cab.

2. Fall. Figur 40. Weil nach diesem ersten Fall ∢ feg = 2 ∢ fie und eben so ∢ geh = 2 ∢ gih, so ist auch ∢ feg + ∢ geh, das ist ∢ feh = 2 ∢ fie + 2 ∢ gih, das ist = 2 ∢ fih (22).

3. Fall. Figur 41. Ferner ist (nach 1. Fall) ∢ kml = 2 ∢ kol und ∢ kml + ∢ lmn = 2 ∢ kol + 2 ∢ lon so ist (23) ∢ lmn = 2 ∢ lon. Also auch hier ∢ lmn am Mittelpuncte doppelt so groß, als ∢ lon an der Peripherie, bei gleichen Bogen.

81. Ein Winkel an der Peripherie, der auf einer Hälfte der Peripherie, d. i. auf dem Halbkreise steht, ist ein rechter.

Der Winkel eac, Figur 42, steht mit seinen Schenkeln auf dem Halbkreis ebc. Man ziehe die gerade adb, so ist nach dem Vorigen (80) ∢ edb = 2 ∢ ead und ∢ bdc = 2 ∢ bac, folglich ist ∢ edb + ∢ bdc = 2 ∢ eab + 2 ∢ bac = ∢ eac; da aber ∢ edb + ∢ bdc = 2 R (44) so ist ∢ eac = 1 R.

Zus. 1. Hieraus ergibt sich von selbst, daß, wenn ein Winkel an der Peripherie auf einem größern Bogen, als der Halbkreis ist, steht, er größer als ein rechter, d. i. ein stumpfer seyn müsse; wenn er aber auf einem kleinern Bogen steht, er kleiner als ein rechter oder ein spitzer Winkel seyn müsse.

Zus. 2. Auf diese Weise läßt sich ein rechtwinkliges Dreieck in jedem Kreise leicht beschreiben, wenn man einen Winkel an der Peripherie mit seinen Schenkeln auf die Endpuncte des Diameters stellt, wie Fig. 42 das △ eac. Legt man nun an diesen rechten Winkel einen von Holz oder Messing gearbeiteten Winkelhaken, so kann man leicht prüfen, ob er genau gearbeitet ist.

82. Alle Winkel an der Peripherie, welche auf einerlei oder gleichen Bogen stehen, sind einander gleich.

Da die Winkel afb, aeb, adb Fig. 43. alle auf dem Bogen a b stehen, so sind sie alle halb so groß als ∢ acb am Mittelpunct (80) der auf demselben Bogen steht, und müssen folglich alle einander gleich seyn.

83. Gleiche Winkel am Mittelpuncte haben in einerlei oder in gleichen Kreisen auch gleiche Bogen und Sehnen.

Wenn man, Fig. 44, annimmt, daß ∢ adb = ∢ edc und die Halbmesser ad = dc, db =

de, so ist (34) △ adb ≌ △ edc also auch ab = ec, und wenn beide Dreiecke so in einander gelegt werden, daß a und b in e und c kommen, so werden alle Puncte des Bogens ab in die zugehörigen Puncte des Bogens ec fallen, weil alle gleich weit vom Mittelpunct abstehen müssen.

Zus. 1. Eben so werden auch, wenn die Bogen eines Kreises gleich sind, die Winkel am Mittelpuncte gleich seyn. Denn diese Bogen können so ineinander gelegt werden, daß sie sich decken. Geschieht dieses, so decken sich auch die zugehörigen Halbmesser, und folglich auch die Winkel am Mittelpuncte.

Zus. 2. Da sich also, nach dem Bisherigen, die Bogen verhalten, wie die Winkel, so werden die Bogen ebenfalls halbirt, wenn man die ihnen zugehörigen Winkel am Mittelpuncte halbirt (40) und umgekehrt.

Zus. 3. Hieraus folgt ferner, daß die Bogen als das Maaß der Winkel können betrachtet werden, wenn diese mit ihrem Scheitel am Mittelpunct eines Kreises stehen. Man theilt daher die ganze Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile oder Grade, und es ist einerlei, ob ich sage, alle Winkel um den Mittelpunct sind = 4 R (44. Anm.) oder sie sind = 360 Grad. Daher ist 2 R = 180 Grad, 1 R = 90 Grad u. s. f. Kürzer schreibt man Grad, wenn man rechts oben an die Zahl ° setzt, z. B.

R = 90°, 2 R = 180°, 3 R = 270°, $1\frac{1}{2}$ R = 135°.

84. Man soll ein reguläres Vieleck zeichnen.

Man theile, Fig. 45, die Peripherie eines Kreises in eine beliebige Menge gleicher Bogen (was hier nur mechanisch vermittelst des Zirkels geschehen kann) und ziehe an den Theilungspuncten gerade Linien von einem zum andern, so entstehen gleiche Sehnen, welche zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte gehören (83).

Anm. 1. Man unterscheide hier Polygonwinkel und Winkel am Mittelpunct. Erstere werden durch die mit einander verbundenen Sehnen gebildet, und so sind hier e f g, f g b, g b c ꝛc. lauter Polygonwinkel, oder solche Winkel, welche am Umfang innerhalb des Vielecks oder Polygons liegen. Dagegen heißen Winkel, wie g a b, b a c, e a d u. s. f. Winkel am Mittelpunct oder Centriwinkel.

Anm. 2. Um ein Quadrat in einem Kreise zu beschreiben, lasse man zwei Durchmesser sich rechtwinklig durchschneiden und verbinde die Endpuncte derselben durch gerade Linien.

Anmerk. 3. Wenn man in diesem Quadrate aus dem Mittelpuncte vier Lothe auf dessen Seiten zieht, solche bis zur Peripherie verlängert, und die zugehörigen acht Sehnen bildet, so entsteht ein regelmäßiges Achteck in dem Kreise. — Auf ähnliche Weise kann man das 16 Eck, das 32 Eck, das 64 Eck u. s. f. in dem Kreise construiren.

85. Man soll die Größe eines Polygonwinkels in einem gegebenen regulären Vieleck finden.

Nachdem man, in Figur 45, die Halbmesser ea, fa, ga ꝛc. gezogen hat, entstehen im regulären Polygon eben so viele Dreiecke, als die Figur Seiten hat. Alle diese Dreiecke sind wegen der drei Seiten, die in einem so groß als in dem andern sind (39) congruent. Daher sind auch alle Winkel in gehöriger Ordnung genommen gleich. Die Winkel eines jeden Dreiecks sind ferner zwei rechten Winkeln gleich (62); eben so die Winkel um den Mittelpunct $a = 4\,R$ (44. Anmerk.). Zieht man aber die Winkel um den Mittelpunct von der Summe der Winkel aller Dreiecke im Polygon zusammen ab, so bleiben die Polygonwinkel übrig. Wenn diese gleich wären, so dürfte man nur mit ihrer Anzahl in ihre Summe dividiren, um die Größe eines einzelnen zu erhalten. Daß sie aber wirklich gleich sind, muß erst bewiesen werden. In Fig. 45 ist $\triangle aef \cong \triangle afg \cong \triangle agb$ (39) u. s. w. und $\sphericalangle afe = \sphericalangle afg = \sphericalangle agf = \sphericalangle agb$ (36) u. s. w. Daher auch $\sphericalangle afe + \sphericalangle afg = \sphericalangle agf + \sphericalangle agb$ (22), das ist $\sphericalangle efg = \sphericalangle fgb$. Der Polygonwinkel wird also gefunden, wenn man von der Summe von zweimal so viel rechten Winkeln als die Figur Seiten oder Dreiecke hat, vier rechte abzieht und das Uebrige durch die Anzahl der Seiten dividirt.

Anmerk. Nimmt man z. B. ein reguläres Sechseck, welches vom Mittelpunct aus in 6 congruente Dreiecke zerlegt ist, so ist die Summe ihrer

Winkel = 12 R (62). Die Winkel am Mittelpunct = 4 R von 12 R abgezogen, bleibt 8 R für sämmtliche Polygonwinkel. Da aber deren 6 sind, so ist die Summe eines Polygonwinkels = $1\frac{1}{3}$ R = 120°.

Wenn man statt Winkel R seine Grade setzt, so ist die Summe aller Winkel eines regulären Sechsecks = 180 X 6 = 1080; davon die Winkel am Mittelpuncte = 360° abgezogen, bleiben für die Polygonwinkel allein 720°, dieses mit 6 dividirt, gibt für einen Polygonwinkel 120°. Eben so findet man für den Polygonwinkel eines regulären Fünfecks = 108°, eines Zehnecks = 144°, u. s. f.

86. Man soll die Größe eines Winkels am Mittelpunct im regulären Polygon finden.

Da alle Winkel um den Mittelpunct herum = 4 R und hier die Winkel alle gleich sind (85), so dividire man die Anzahl der Seiten in 4 R, um die Größe eines solchen Winkels zu erhalten. Oder man dividirt mit der Anzahl der Seiten in 360° (= 4 R; 83. Zus. 3). Daher ist der Centriwinkel eines regulären Sechsecks = 60°, eines regulären Siebenecks = $51\frac{3}{7}$°, eines regulären Achtecks = 45° u. s. f.

87. Man soll den Flächeninhalt eines regulären Polygons finden.

Da das Polygon sich in lauter congruente Dreiecke von gleicher Höhe und Grundlinie zerlegen läßt, so sucht man (nach 73. Anmerkung) den Inhalt eines dieser Dreiecke und multiplicirt

denselben mit der Anzahl aller Dreiecke. Oder, man nimmt die Höhe eines Dreiecks und multiplicirt sie mit dem halben Umfange des ganzen Polygons. Oder man multiplicirt das Maaß der halben Höhe mit dem Maaße des ganzen Umfanges.

88. Man soll ein verlangtes reguläres Polygon in einen Kreis beschreiben, dessen Halbmesser gegeben ist.

Man setze an den gegebenen Halbmesser ab, Figur 45, durch Hülfe eines Instrumentes, welches man den Transporteur nennt, den zugehörigen Winkel am Mittelpuncte (86) und beschreibe mit dem Halbmesser die Peripherie. Der Winkel am Mittelpuncte schneidet den Bogen fg, dessen Sehne so oft im Kreise herum getragen wird, als die Figur Seiten hat.

89. Man soll ein reguläres Polygon um einen Kreis beschreiben.

Wäre z. B. ein Fünfeck gegeben, dessen Centriwinkel $= 72°$ (86) so trage man diesen durch Hülfe des practischen Instrumentes (Transporteur) an den beliebig verlängerten Halbmesser ac, Fig. 46, hier $= \measuredangle$ dac, halbire diesen Winkel durch den Radius ab, errichte auf b die Tangenten bd, bc (79), so daß diese die Schenkel ad, ac des Centriwinkels dac schneiden, so entsteht das Dreieck dac, welches zu dem verlangten regulären Polygon gehört, welches jetzt leicht zu ergänzen ist. Man nimmt nämlich dazu entweder einen neuen Kreis, dessen Diameter $=$ ad ist, oder zieht die Schenkel a●, af,

ag der übrigen Centriwinkel (88), verlängert sie, und trägt die gefundenen Seiten cd nach de, ef u.s.f.

90. Man soll ein reguläres Polygon über einer gegebenen Linie beschreiben.

In Fig. 45, sey die Seite dc gegeben. Man berechne den Polygonwinkel (85), halbire ihn und setze, ebenfalls wieder durch Hülfe des Transporteurs, die eine Hälfte an den Punct d, die andere an den Punct c. Da, wo sich die beiden auf d und c errichteten Linien durchschneiden, ist der Mittelpunct eines Kreises, den man jetzt vollendet und worin sich die übrigen Dreiecke des Polygons beschreiben lassen (83 und 85).

Anmerk. Diese Art, ein Polygon zu entwerfen, erfordert weit mehr Genauigkeit im Zeichnen, als die vorige (88). Um die verlangten Winkel gehörig anzusetzen, bedient man sich eines gut gearbeiteten Transporteurs, welcher den Schülern vorgezeigt werden muß.

91. Die Seite des regulären Sechsecks ist dem Halbmesser des Kreises gleich.

Berechnet man den Polygonwinkel eines regulären Sechsecks, so findet man ihn $= 1\frac{1}{3}$ R $= 120$ Grad (85). Wollte man nun das reguläre Sechseck über einer gegebenen Linie beschreiben (89), folglich den Polygonwinkel halbiren, so würde man diese Hälfte $= 60°$ und folglich eben so groß finden, als den Winkel am Mittelpuncte (86). Da nun jeder der drei Winkel eines Dreiecks in diesem Polygone = 60 Grad wird, so sind auch die drei Seiten dieser

Dreiecke gleich (38. Anmerk.). Daher ist der Halbmesser eines Kreises der Seite des in denselben zu beschreibenden regelmäßigen Sechsecks gleich.

Zus. 1. Aus dem regulären Sechseck entsteht ein reguläres Zwölfeck, wenn man alle Winkel am Mittelpunct halbirt, die geraden Linien, die sie halbirt, bis an die Peripherie des Kreises zieht, worin das Sechseck steht, wo dann die neuen Sehnen, deren jetzt 12 entstehen, den Umfang des regulären Zwölfecks bilden. Auf diese Art kann man weiter hinaus das reguläre Vierundzwanzigeck u. s. w. bilden, so daß man der Peripherie des Kreises immer näher kommt. Aber immer wird doch, so sehr man auch die Anzahl der Seiten vermehrt, die im Kreise beschriebene Figur kleiner seyn als der Kreis, und ihr Umfang kleiner als dessen Peripherie.

Zus. 2. Denkt man sich ferner eine reguläre Figur um den Kreis beschrieben (89) und man verdoppelt ihre Seiten (91, Zus. 1.), so wird zwar ihr Umfang immer etwas größer seyn als die Peripherie, folglich auch sie selbst größer als der Kreis. Je öfter man indessen die Anzahl ihrer Seiten verdoppelt, desto mehr wird sie sich dem Kreis nähern, so daß der Unterschied zuletzt ganz unbedeutend wird. So kommen beide reguläre Figuren, sowohl

die innerhalb (91. Zus. 1.) als die ausserhalb des Kreises (89), bei fortgesetzter Vermehrung ihrer Seiten, einander so nahe, daß sie sich selbst im Kreise beinahe verlieren werden und man kann also sagen: der Kreis sey einem regulären Polygone von unendlich vielen Seiten gleich.

92. Der Kreis ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie und dessen Höhe der Halbmesser des Kreises ist.

Nimmt man nach dem Vorigen (91. Zus. 2.) an, der Kreis sey einem Polygone von unendlich vielen Seiten gleich, so verwandelt man alle Dreiecke des Polygons in ein einziges, dessen Grundlinie der Umfang der Figur und dessen Höhe die Höhe eines einzelnen Dreiecks derselben ist (67. Anm. 2.). Hier nimmt man aber die Peripherie zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe, weil der Halbmesser auf jedem sehr kleinen Theile der Peripherie senkrecht steht.

Anmerk.. 1. Die Kreisfläche in ein Dreieck, dieses in ein Parallelogramm (69) und endlich letzteres in ein Quadrat (100. Zus.) verwandeln, heißt die Quadratur des Kreises suchen.

Uebrigens hat der berühmte Archimedes zuerst den Umfang des Kreises zu bestimmen gesucht, indem er den Umfang eines in den Kreis (88) und eines um den Kreis (89) beschriebenen Polygons von 96 Seiten berechnete. Durch spätere Methoden fand man das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange des Kreises wie 7 zu 22 oder wie

100 zu 314 und noch genauer wie 113 zu 355, noch schärfer endlich wie 1 : 3, 1415926535 8979323846264338327950 28, worin die nach der ersten Ziffer 3 folgende Ziffer Decimalbrüche sind (Siehe unten 121 u. f.) Dieses Verhältniß heißt das Ludolphische, von Ludolph van Ceulen, welcher i. J. 1610 zu Leyden gestorben ist.

Anmerk. 2. Es folgt ferner, daß wenn sich der Kreis in ein Dreieck oder Quadrat verwandeln läßt, die Kreise sich auch so zu einander verhalten, wie diese Quadrate; also auch wie die Quadrate ihrer Durchmesser, oder auch wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

93. Wenn durch alle Theilungspuncte einer in gleiche Theile getheilten geraden Linie Parallellinien gezogen werden, so wird eine andere in diese Parallellinien gelegte gerade Linie gleichfalls in lauter unter sich gleiche Theile getheilt.

Die Linie a e, in Fig. 47, ist in fünf gleiche Theile getheilt und durch die fünf Theilungspuncte a, b, c, d, e sind parallele Linien gezogen. Zieht man nun g t, so wird diese auch in fünf unter sich gleiche Theile getheilt. Es ist nämlich g r mit a e parallel gezogen, daher denn g o = ab = b c = o n = m p (64), ∢ g o m = ∢ a b o (57) = ∢ m o n (56) = ∢ m p q (56); ∢ o g m = ∢ p m q (57), somit △ g o m ≌ △ m p q (35) und folglich die gleichliegenden Seiten g m und m q gleich. Eben so beweißt man die Congruenz der übrigen Dreiecke und die Gleichheit der übrigen Seiten q v, v t.

Zus. 1. In Figur 47. verhält sich also a b zu a c wie 1 zu 2, welches man kürzer so schreibt a b : a c = 1 : 2. Eben so verhält sich g m zu g q wie 1 zu 2, oder g m : g q = 1 : 2. Folglich auch a b : a c = g m : g q (27). Eben so a b : a e = g m : g t u. s. w. Ferner ist g m : g q = g o : g n, weil g o = a b und g n = a c. Diese Linien stehen daher, wie man sagt, im Verhältniß und es läßt sich eben so richtig umgekehrt sagen g n : g o = g q : g m das ist

2:1 = 2:1. Stellt man sich ferner vor, die Linie ab wäre in zwei gleiche Theile getheilt, so hätte die Linie ac vier solcher Theile; daher auch dieses Verhältniß richtig wäre ab:ac = 2:4. Es kann also nicht blos gesagt werden: ab:ae = 1:4, sondern auch ab:ae = 2:8. Und man mag für ab so viel Theile nehmen, als man will, so wird ac deren doppelt so viel, ad dreimal so viel u. s. f. haben. Ferner ist begreiflich, daß ich jenes Verhältniß umgekehrt lesen kann, ohne daß es an seiner Richtigkeit etwas verliert; denn so wie ich z. B. sagen kann: 1 : 4 = 2 : 8, eben so muß ich sagen können 8:2 = 4:1, und selbst so 2:8 = 1:4 u. s. f.

Zus. 2. Auch ist aus dem Bisherigen klar, daß wenn gr in vier gleiche Theile getheilt ist, und man aus g eine Linie gt unter beliebigem Winkel rgt zieht, die durch die Parallelen om, nq, sv, rt entstehenden Theile gm, mq, qv, vt unter sich gleich seyn müssen.

94. Wenn in einem beliebigen Dreiecke mit irgend einer Seite eine Parallele im Dreiecke gezogen wird, so entstehen zwei Dreiecke, deren gleichliegende Seiten im Verhältnisse stehen, d. h. proportional sind.

Was auch immer ab für ein Theil von ad, in Figur 48, seyn mag, eben dieser wird, nach dem Vorigen (93) ac von ae seyn. Es läßt sich denken,

daß wenn ad in lauter gleiche Theile getheilt wäre, und es fiele noch kein Theilungspunct in b, sondern daneben, so wäre doch endlich bei fortgesetzter neuer Theilung dieses möglich. Da nun bc mit de parallel, so ist ab: ad = ac: ae. Zieht man ferner auch cf mit bd parallel, so sind beide Linien gleich (64) weil bcfd ein Parallelogramm ist. Auch hier läßt sich folgendes Verhältniß setzen: ef: ed = ec: ea. Gesetzt nun ef wäre gleich 2 und ed = 6 folglich ef: ed = 2: 6, hier bliebe für df = 4, daher df: ed = 4: 6; eben so müßte es sich mit ac und ae verhalten, daher auch df: de = ac: ae. Aber ac: ae = ab: ad, daher auch df: de = ab: ad und weil bc = df (28) also auch bc: de = ab: ad oder welches einerlei wäre ab: ad = bc: de. Auf diese Art stünden alle gleichliegenden Seiten der Dreiecke abc und ade im gehörigen Verhältnisse oder wären proportional.

Anmerk. Wenn in zwei Dreiecken, wie Fig. 48, die Seiten des einen den Seiten des andern Dreiecks proportional und alle gleichliegende Winkel einander gleich sind; so heissen diese Dreiecke ähnliche. Daß aber ∢ abc = ∢ ade und ∢ acb = ∢ e ist, folget aus der mit de parallel gezogener Linie bc. Die Aehnlichkeit der Dreiecke besteht daher in zwei Eigenschaften:

1. Porportionalität der gleichliegenden Seiten.
2. Gleichheit der ähnlichliegenden Winkel.

95. Man soll zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionallinie suchen.

Es seyen drei Linien gegeben ab, ac, ad.

Man setze sie unter einem beliebigen Winkel in der Ordnung wie in Fig. 48. zusammen, und ziehe mit bc die Linie de parallel, so erhält man das Verhältniß ab : ac = ad : ae, und ae ist die gesuchte vierte Proportionallinie (94).

Zus. Auf ähnliche Weise kann man zu zwei gegebenen Linien die dritte proportionale finden. Wenn nämlich ab und ac gegeben ist (Fig. 48) so mache man bd = ac und ziehe die mit bc gleichlaufende de. Hierdurch wird sich ab : ac = ac : ce verhalten.

96. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks einzeln genommen gleich sind zweien Winkeln eines andern Dreiecks, so sind beide Dreiecke ähnlich.

Wenn in dem △ ABC, Figur 49, ∢ CAB = ∢ ead, Figur 48, und eben so ∢ ABC = ∢ ade, so lege man das Dreieck ABC so in das △ ade, daß ∢ CAB in ∢ cad fällt, so würde in dieser Lage, weil ∢ ABC = ∢ d, auch die BC mit de gleichlaufend seyn. (54) Ist aber dieses, so sind die Seiten AB, BC, CA den Seiten ad, de ea proportional (94) folglich die Dreiecke ABC und ade ähnlich (94. Anmerk.)

97. Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gegenseitig gleich ist, und die ihn einschließenden Seiten im einen Dreiecke denen des andern proportional sind, so sind beide Dreiecke ähnlich.

Wenn im △ ABC, Fig. 49, ∢ CAB = ∢ ead, Figur 48, und AC : ae = AB : ad, so lege man

wieder beide Dreiecke mit diesen gleichen Winkeln in einander, daß die Puncte A und a in einander kommen und die proportionalen Seiten in einander, so ist AC: ae = AB: ad und △ abc ≅ △ ABC. Wäre nun bc nicht mit de parallel, so kann durch b eine mit de gleichlaufende Linie gezogen werden, welche entweder bei m oder bei n in ae eintreffen muß. In jenem Falle wäre ad: ae = ab: am, in diesem ad: ae = ab: an. Da aber, nach der Annahme, ad: ae = ab: ac ist, so kann das vierte Glied dieser Proportion weder am noch an seyn, weil am < ac und an > ac ist. Folglich ist bc parallel mit de. Daher ∢ abc = ∢ d, ∢ acb = ∢ e (57). Folglich △ abc ∼ △ ABC ∼ △ ade.

98. Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken die Seiten, welche einen der spitzen Winkel einschließen, proportional sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

In Fig. 50. sey ∢ D = ∢ a = R und DC: CE = ac: cb, so lege man △ CDE in △ cab, so, daß CD = da, so wird △ CDE ≅ △ dan und weil ac: cb = ad: dn, so ist dn parallel mit cb und folglich △ adn ≌ △ DCE ≌ △ acb.

99. Man soll einem Dreieck ein ähnliches beschreiben, wozu eine Seite gegeben wird.

Es sey, Figur 48, das Dreieck ade gegeben und eine Seite ab. Wenn diese, wie hier, in ab liegt, so ziehe man bc parallell mit de so werden

beide Dreiecke ähnlich, nämlich $\triangle$ ade $\sim$ $\triangle$ abc. Wäre aber das kleinere Dreieck abc gegeben und eine Seite ad, so lege man ad in ab, verlängere ac und ziehe durch den Punct d die Linie de mit bc parallel.

Zus. Noch leichter wird ein ähnliches Dreieck beschrieben, wenn außer einer Seite noch die diese Seite einschließenden Winkel gegeben sind.

100. Wenn man aus der Spitze eines rechtwinklichen Dreiecks ein Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite fällt, so wird dieses Dreieck in zwei andre zertheilt, die unter sich und dem ganzen Dreiecke ähnlich sind.

Das $\triangle$ adc, Figur 51, habe bei c einen rechten Winkel, aus dessen Spitze ein Perpendikel cb auf ad fällt, so ist $\triangle$ acd $\sim$ $\triangle$ dcb $\sim$ $\triangle$ abc. Man vergleiche die beiden ersten Dreiecke, in welchen zwei Winkel gleich sind, nämlich $\measuredangle$ d $=$ $\measuredangle$ d, und $\measuredangle$ dca $=$ $\measuredangle$ cbd; daher beide ähnlich (96). Weil aber die Summe zweier Winkel in beiden Dreiecken gleich ist, folglich von 2 R (62) abgezogen auch gleiches übrig läßt, so ist auch der dritte Winkel im einen (hier $\measuredangle$ cad) dem dritten im andern (hier $\measuredangle$ dcb) gleich und weil ferner $\measuredangle$ abc $=$ $\measuredangle$ cbd (8. Anm. 2), so sind auch die Dreiecke abc und cbd ähnlich.

Zus. Aus diesem Satze folgt ferner, daß man von zwei gegebenen Linien bd und ab, Fig. 51,

die mittlere Proportionallinie findet, wenn man, wie hier geschehen, beide in eine einzige verwandelt, hier a d, von dieser die Mitte sucht und einen Halbkreis beschreibt, daß die Puncte a und d die Endpuncte des Diameters werden (81. Zus. 2). Hierauf errichtet man bei b ein Perpendikel nach c, einem Puncte der Peripherie, und zieht c a und c d. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke a b c und c b d verhält sich a b : b c = b c : b d, daher ist b c die mittlere Proportionallinie. Der Nutzen dieses Satzes ist unter andern, daß man durch die gefundene mittlere Proportionallinie ein Quadrat beschreiben kann, welches so groß ist, als ein rechtwinkliges Parallelogramm, dessen beide Seiten hier unter a b und b d gedacht werden.

Anmerk. Dieser Satz nimmt stillschweigend an, daß ein aus n mit n a = n b beschriebener Kreis durch den Punct c gehen müsse, was offenbar eines Beweises bedarf. Man ziehe aus n das Loth n g auf a c und das Loth n h auf c d, so ist g c h n ein Rechteck und wegen n h par. a c und n g par. d c, ist △ d h n $\cong$ △ n g a; folglich d h = h c, c g = g a. Wird nun die gerade c n gezogen, so ist △ c g n $\cong$ △ a g n, woraus n a = n c = n d folget.

101. Man soll eine Figur zeichnen, welche einer gegebenen ähnlich ist.

Entweder ist diese Figur so beschaffen, daß sie sich bequem in mehrere Dreiecke zerlegen läßt, indem man beliebige Diagonalen zieht, wie Fi=

gur 52, wo der Figur ABCDE die ähnliche abcde entworfen ist, nachdem zuvor von A nach C und D gerade Linien gezogen worden und die Linien bc, cd, de mit BC, CD, DE parallel genommen wurden (94). Oder die Figur ist von der Beschaffenheit, daß sie nicht füglich in Dreiecke zerlegt werden kann, wenn nicht, wie Fig. 53, bei ABC, DEFG, die Hülfslinie AF gezogen wird. Jetzt erst ziehe man die Diagonalen AC, AD, AE, nehme gleichfalls die Linien bc, cd, de, ef, mit den gleichnamigen parallel, und eben so auch gf mit GF, so erhält man die Figur abcdef, in welcher die Dreiecke abc, acd, ade, aef den gleichnamigen der großen Figur ähnlich sind. Nachdem man noch △ agf ∾ △ AGF von der ganzen Figur abgezogen, bleibt die Figur abcdefg übrig.

In der Folge wird noch gezeigt werden, wie diese Figuren mit Hülfe gewisser Instrumente besonders entworfen werden.

Zus. Das Zerfällen der ganzen Figur in Dreiecke ist sowohl zur bessern Uebersicht, als auch vorzüglich deswegen nöthig, weil die Dreiecke einzeln berechnet werden müssen, um aus ihrer Summe den Inhalt der ganzen Figur, wovon jene die Theile vorstellen, zu erhalten.

Von den Körpern.

102. Ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat. Die Grenzen desselben sind Flächen.

Anmerk. 1. Hier muß man sich nicht allemal einen wirklichen physischen Körper denken z. B. eine Säule, einen Ballen, Klumpen Metall ꝛc.; sondern nur den Raum, den ein solcher Körper einnimmt, gerade so wie man sich bei der Ebene nicht gerade eine Wiese, einen Acker u. s. f. sondern nur eine Ausdehnung nach Länge und Breite vorstellt.

Anmerk. 2. Es ist nöthig, daß alle folgende Erklärungen dem Anfänger durch die wirkliche Anschauung aufgeklärt werden, was leicht geschehen kann.

103. Eine gerade Linie ist auf einer Ebene perpendicular, wenn sie mit allen in dieser Ebene liegenden geraden Linien, mit denen sie in Berührung kömmt, rechte Winkel bildet.

104. Eine Ebene ist auf einer andern Ebene perpendicular, wenn eine auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt (welcher eine gerade Linie ist) perpendiculare Linie der einen Ebene auch auf der andern Ebene perpendicular stehet.

105. Die Neigung einer Ebene gegen eine andere Ebene wird durch den Winkel zweier auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt perpendicular stehender Linien bestimmt.

106. Ein körperlicher Winkel oder eine Ecke wird durch das Zusammentreffen von wenigstens

drei geraden Linien, welche nicht in einerlei Ebene liegen und sich in einem Puncte vereinigen, bestimmt. Seine Grenzen sind zunächst ebene Winkel, deren 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w. vorhanden seyn können.

107. Ein **Prisma** ist ein Körper, welcher zwischen zwei geradlinigen, parallelen und congruenten Figuren (Grundflächen) und so viel Parallelogrammen (Seitenflächen) als die Grundfläche Seiten hat, enthalten ist. Ein Prisma heißt **senkrecht**, wenn seine Seitenlinien lothrecht auf dessen Grundflächen stehen; ausser dem wird es **schief** genannt. Die Figur 57 kann diesen Körper zum Theil anschaulich machen.

Anmerk. Nach der Zahl der Seiten heißt das Prisma dreiseitig, vierseitig, vielseitig, oder dreieckig, viereckig ꝛc. Die Höhe des Prisma ist ein Perpendikel von einer Grundfläche auf die andere.

108. Ein **Parallelepipedum** ist ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind. (Figur 54.) Auch dieses ist entweder ein **senkrechtes** oder ein **schiefes**. Jedes Parallelepipedum ist daher von sechs Parallelogrammen eingeschlossen, wovon jede zwei gegenüberstehende einander congruent sind.

Anmerk. Es ist gleichviel, welche gegenüber stehende Seiten eines Parallelepipedums man als die Grundfläche betrachten will.

109. Ein **Würfel** ist ein Prisma, welches von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen ist.

Anmerk. 1. So wie bei Ausmessung des Flächeninhalts der Figuren das Quadratmaaß gebraucht wird, so dient zur Bestimmung des körperlichen Inhalts das Würfel- oder Cubikmaaß. Man stelle sich einen Würfel vor, dessen Seitenflächen sechs Quadratzolle sind, so nennt man ihn Cubikzoll. Zwei solcher Cubikzolle auf einander gestellt und als ein Körper betrachtet, bilden ein Parallelepipedum von einem Quadratzoll Grundfläche und einer Höhe von zwei Zoll, oder zwei Quadratzoll Grundfläche und ein Zoll Höhe (108. Anm.). So kann man beliebig durch Hinzufügung mehrerer Cubikzolle die Grundfläche und Höhe verändern und daraus jedesmal ein anderes Parallelepipedum erhalten. Setzt man die Grundfläche eines solchen zu 100 Quadratzoll in einem Quadrate zusammen, so hat man einen Quadratschuh zur Grundfläche, und nimmt die Höhe auch gleich 10 Zoll oder einem Fuß, so entsteht ein Würfel, Cubikfuß genannt, dessen Grundfläche 100 Quadratzoll, die Höhe aber 10 Zoll hat, und beides mit einander multiplicirt, giebt 1000 Cubikzoll für den Cubikfuß. Eben so erhält man für die Cubikruthe 1000 Cubikfuß Inhalt.

Anmerk. 2. Auf gleiche Art findet man den Inhalt eines jeden senkrechten Parallelepipedums, wenn man die Grundfläche nach dem Quadratmaaße bestimmt, und dieß mit der Höhe multiplicirt. Denn man nehme ein Brett von der Dicke eines Zolls und nenne diese Dicke seine Höhe, die breite Fläche desselben seine Grundfläche, welche 30 Quadratzoll haben soll; so lassen sich aus diesem Brette 30 Würfel schneiden, welches Cubikzolle sind. Legt man wieder ein eben so großes und ähnliches Brett auf dieses und betrachtet beide als ein einziges Parallelepipedum, so würde offenbar die Grundfläche = 30, mit der Höhe = 2

multiplicirt (nämlich die Zahl 60) angeben, daß sich 60 Cubikzolle aus dem Ganzen schneiden lassen, oder mit andern Worten, daß dieses Parallelepipedum 60 Cubikzoll körperlichen Inhalt habe. Es ist aber einerlei, ob ich mir hier eine gewisse Anzahl ganz gleicher Bretter über einander liegend vorstelle, oder ob ich einem gewissen Parallelepipedum eben so viele gleiche, mit der Grundfläche parallel laufende Durchschnitte gebe.

Anmerk. 3. Denkt man sich also ein senkrechtes Parallelepipedum, dessen Länge = 10′ dessen Breite = 5′ und dessen Tiefe (Dicke) = 3′ ist, so würden auf dessen Grundfläche 5 X 3 = 15 Cubikfuß, und in seinem ganzen Körperraume 15 X 10 = 150 Cubikfuß gestellt werden können. Daher findet man den Inhalt dieses senkrechten Parallelepipedums, wenn man die Maaße der Länge, Breite und Tiefe mit einander multiplicirt.

Anmerk. 4. Enthielte die Länge 12′3″, die Breite 4′2″ und die Tiefe 2′1″, so nähme man den Cubikzoll als Maaß und der Inhalt wäre = 123 X 42 X 21 = 108,486 Cubikzolle = 108 Cubikfuß und 486 Cubikzolle.

Zus. Gesetzt, es hätten zwei Parallelepipeda zwar gleiche Grundfläche und Höhe, aber das eine davon sey schief, d. h. seine Seitenflächen stünden auf der Grundfläche nicht alle perpendicular; werden beide in diesem Fall gleichen Inhalt haben? In Figur 55 sey dbcfgnki ein schiefes Parallelepipedum. Man errichte auf derselben Grundfläche engf ein senkrechtes aefcnglm, so werden die

gleich großen Stücke edbaef und likmng nur mit einander verwechselt und ersteres an die Stelle des letztern gesetzt.

Anmerk. Soll also ein schiefes Parallelepipedum ausgemessen werden, so multiplicirte man das Maaß seiner Grundfläche mit dem Maaße seiner senkrechten Höhe.

110. Alle dreieckige Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich am Körper-Inhalte.

Denn jedes dreieckige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedums, welches die nämliche Höhe und die doppelte Grundfläche hat. Dies wird aus Fig. 54 klar, wo die beiden dreieckigen Prismen acbnom und cbdpno zusammen das Parallelepipedum abdcopnm bilden. Da nun Parallelepipeden von gleichen Grundflächen und Höhen gleich sind, so müssen es auch ihre Hälften d. h. die obigen dreieckigen Prismen seyn.

Zus. 1. Da sich alle vielseitigen Prismen durch Diagonal-Schnitte in dreieckige Prismen zertheilen lassen, wie sich leicht durch Zeichnungen nachweisen läßt, so sind auch alle Prismen von einerlei Grundfläche und Höhe einander gleich am Inhalte.

Zus. 2. Daher findet man den Inhalt eines vielseitigen Prisma, wenn man das Maaß der Grundfläche mit dem Maaße der lothrechten Höhe multiplicirt. Die wirkliche Berechnung

solcher Beispiele ist eine sehr lehrreiche Uebung für Anfänger.

111. Ein Cylinder oder eine Walze, Fig. 56, ist der körperliche Raum zwischen zwei gleichen und parallelen Kreisen (als Grundflächen) und einer an die Peripherien beider Kreise gelegten krummen Fläche (der Seitenfläche), so daß jene dadurch mit einander verbünden sind. Eine gerade Linie von dem Mittelpunct des einen Kreises bis zu dem des andern heißt die Axe des Cylinders. Wenn diese Axe auf der Grundfläche perpendiculär stehet, so heißt der Cylinder senkrecht, wenn dieß nicht ist, schief.

112. Der Inhalt eines Cylinders wird ausgedrückt durch das Product aus dem Maaß der Grundfläche in das Maaß der Höhe.

Man kann sich nämlich die Grundfläche eines Cylinders als ein Polygon von unendlich vielen Seiten vorstellen (91, Zus. 2.). Demnach zerfiele die krumme Seitenfläche des Cylinders in unendlich viele Parallelogramme, deren Grundlinien auch unendlich klein, die Höhen gleich der Höhe des Cylinders wären. Aus dem Cylinder wird also ein vielseitiges Prisma; folglich muß von ihm eben das gelten, was von jenem gilt. (110, Zus. 2.)

Zus. Bei gleichen Grundflächen verhalten sich demnach Prismen und Cylinder zu einander wie ihre Höhen, folglich auch bei gleichen Höhen, wie ihre Grundflächen. Wenn z. B.

jeder von zwei Cylindern zur Grundfläche 10 Quadratzoll hält, die Höhe des einen wäre aber 4 Zoll und die Höhe des andern 8, so muß der eine noch einmal so groß seyn als der andere, oder sich zum andern verhalten wie 8 zu 4, d. i. wie 2 zu 1. Eben so umgekehrt. Es heiße der eine Körper K, das Maaß seiner Grundfläche G, seiner Höhe H; bei dem andern Prisma habe k, g, h gleiche Bedeutung, so ist $K = G \times H$, und $k = g \times h$, folglich auch $K : k = G \times H : g \times h$. Ist nun $G = g$, so wird $K : k = H : h$, und für $H = h$ wird $K : k = G : g$.

113. Eine **Pyramide** ist der körperliche Raum zwischen einer geradlinigen Figur (als Grundfläche) und so viel Dreiecken (den Seitenflächen) als die Grundfläche Seiten hat, welche sich alle in einem Puncte (der Spitze) vereinigen.

Anmerk. Die Pyramide wird eben so, wie das Prisma nach der Zahl der Seiten oder Ecken bestimmt und benannt. Beispiele.

Ein Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche oder auf ihre Verlängerung, heißt die Höhe der Pyramide.

114. Jeder Schnitt durch die Pyramide, der mit der Grundfläche parallel geführt wird, wird auch der Grundfläche ähnlich seyn.

Denn durch den parallelen Schnitt entstehen parallele Linien auf den Dreiecken, die hier Seitenflächen sind. Da hierdurch ähnliche Dreiecke gebildet

werden, so werden die gleichliegenden Seiten proportional, woraus zuletzt die Aehnlichkeit der Schnitte selbst folgt.

115. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen, sind einander gleich.

Man theile die gleichen Höhen dieser Pyramiden in eine sehr große Anzahl gleicher Theilchen und lege durch jeden Theilpunct Parallelebenen mit ihren Grundflächen. Durch solche Durchschnitte entstehen Pyramidenstücke, die man, weil ihre Höhe sehr unbedeutend ist, für Prismen ansehen kann. Weil aber diese unter solchen Umständen gleich sind (nach 110, Zus. 1), so müssen es auch die Pyramidenstücke seyn, und da die ganzen Pyramiden aus gleich vielen solcher Theilchen besteht, so müssen auch die Pyramiden selbst gleich seyn.

116. Jede dreieckige Pyramide ist der dritte Theil eines dreieckigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.

Wenn, Fig. 57, a b c d e f ein dreieckiges Prisma durch die Schnitte a e c und a e d in drei Theile zerfällt, so erhält man die Pyramiden a b c e, f e d a und a c d e, welche, weil sie alle gleiche Grundfläche und Höhe haben, einander gleich seyn müssen. Sie bilden daher zusammen das dreieckige Prisma und jede derselben ist ein Drittheil des Prisma, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Anmerk. Es ist sehr zu empfehlen, daß sich die Anfänger eine dreiseitige Pyramide aus einer Rübe,

Kartoffel, oder d. gl. verfertigen und in die gehörigen drei Pyramiden zerschneiden, um die Anschaulichkeit dieses wichtigen Satzes zu befördern.

Zus. Der Inhalt einer Pyramide wird also gefunden, wenn man das Maaß der Grundfläche mit dem Maaße ihrer Höhe multiplicirt und das Product durch 3 dividirt; oder kürzer, man multiplicirt das Maaß der Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe, oder das Maaß der Höhe mit dem dritten Theil der Grundfläche. Eben dieses gilt auch von vieleckigen Pyramiden, welche durch Diagonalschnitte in mehrere dreieckige zertheilt werden können.

Dividirt man daher mit dem dritten Theil der Höhe in den gegebenen Inhalt, so findet man die Grundfläche u. s. w.

117. Ein Kegel ist der körperliche Raum zwischen einem Kreise (der Grundfläche) und einer krummen Fläche (der Seitenfläche), welche um die Peripherie jenes Kreises so gelegt ist, daß sie außerhalb desselben einen Punct (die Spitze) trifft, von dem lauter gerade, in die Ebene der Fläche fallende Linien nach dem Umfange der Grundfläche können gezogen werden. (Fig. 58.)

Anmerk. Die Axe des Kegels heißt eine gerade Linie vom Mittelpunct der Grundfläche bis zur Spitze des Kegels. Eine Linie wie ab, oder ac heißt die Seite des Kegels.

118. Ein Kegel und eine Pyramide, die beide gleiche Grundfläche und Höhe haben, sind einander gleich.

Da die Grundfläche des Kegels ein Kreis ist und dieser einem Polygone von unendlich vielen Seiten gleich seyn kann (91, Zus. 2.), so stelle man sich die Grundfläche als ein solches Polygon vor, die krumme Seitenfläche aber als aus so vielen Dreiecken bestehend, als die Grundfläche Seiten hat, die sich alle in der Spitze des Kegels als in einem Puncte vereinigen. Dadurch entsteht statt des Kegels eine Pyramide von unzählig vielen Ecken. Da nun aber Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe gleich sind, so gilt dieß auch von Kegeln und Pyramiden (115.).

Zus. 1. Ein Kegel kann daher auch als der dritte Theil eines Cylinders betrachtet werden, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Zus. 2. Der Inhalt des Kegels wird daher durch ein Product aus dem Inhalte der Grundfläche in dem dritten Theil des Maaßes seiner senkrechten Höhe bestimmt.

119. Eine Kugel ist der körperliche Raum, welchen ein Halbkreis beschreibt, der sich ringsum um seinen unverrückten Diameter bewegt. Die Peripherie dieses Halbkreises beschreibt bei dieser Herumbewegung die Oberfläche der Kugel (die Kugelfläche).

Anmerk. Jeder Schnitt der Kugel durch ihren Mittelpunct ist folglich ein Kreis, und jeder Theil der Kugelfläche ist vom Mittelpuncte gleich weit entfernt. Ferner stellt jede gerade Linie von einem Puncte der Kugelfläche durch den Mittelpunct nach einem andern einen Diameter der Kugel vor.

Zus. Ein Kreis durch den Mittelpunct der Kugel heißt hier ein größter Kreis; denn jeder andere, dessen Mittelpunct mit dem der Kugel nicht zusammentrifft, ist kleiner.

120. Die Kugel ist zwei Drittel eines Cylinders, dessen Diameter und Höhe dem Diameter der Kugel gleich ist.

Wenn, Fig. 46*, das Parallelogramm abcd, welches den Halbkreis awb umgibt, sich um die unbewegliche Linie wi drehend vorgestellt wird, so beschreibt abcd einen Cylinder, dic einen Kegel und awb eine Halbkugel. Die Linie uv stelle einen parallelen Querdurchschnitt durch alle drei Körper vor, dem man eine, jedoch höchst unbedeutende Dicke zuschreiben kann, so gehört, als Halbmesser, om für den Kegel, on für die Halbkugel und ov für den Cylinder. Da aber wegen Aehnlichkeit der Dreiecke iom und iwc, die Seite om = oi ist, weil iw = wc = ib ist, so setze man für om die oi und man erhält das Dreieck oin. Hier gilt oi für den Halbmesser des Kegels, on für jenen der Kugel, und in (= ib = ov) für Radius des Cylinders. Da nun die Kreise selbst sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Halb-

messer (92, Anm. 2.), so wird das Quadrat von oi, vom Quadrate von in abgezogen, das Quadrat on übrig lassen (74), welches der Kugel angehört. Da nun die angegebenen drei Körper gleiche Höhe haben, so heißt dieses soviel als: der Kegel, vom Cylinder von gleicher Höhe und Grundfläche abgezogen, gibt die Kugel. Da nun der Kegel $\frac{1}{3}$ des Cylinders beträgt, so hat die Kugel $\frac{2}{3}$ desselben.

Zus. 1. Man kann sich aber auch die Kugel als aus unzähligen Pyramiden zusammengesetzt vorstellen, deren Grundflächen an der Oberfläche der Kugel, die Spitzen im Mittelpunct sich vereinigen. Alle diese Pyramiden sind einer einzigen Pyramide gleich, deren Grundfläche der Summe aller Grundflächen jener kleinen Pyramidchen zusammen genommen und deren Höhe, der Höhe jener, d. h. dem Radius der Kugel gleich ist. Man dividire also mit dem dritten Theil dieser Höhe in den gegebenen (oder gefundenen) Inhalt, so erhält man die Grundfläche (116. Zus.), welche hier der Oberfläche der Kugel gleich ist.

Zus. 2. Auch läßt sich die Oberfläche der Kugel auf folgende Art finden. Es heiße K der Inhalt der Kugel, d ihr Durchmesser, f die Fläche ihres größten Kreises und F die Kugelfläche, so ist $K = \frac{1}{6}\, d \times F$ (nach Zus. 1.). Auch ist $K = \frac{2}{3}\, d \times f$ (120.), folglich ist $\frac{1}{6}\, d \times F =$

$\frac{2}{3} d \times f$, oder $\frac{1}{6} F = \frac{2}{3} f$, oder $F = \frac{2}{3} f \times 6 = \frac{12}{3} f = 4 f$. Dieses heißt: die Oberfläche der Kugel ist das Vierfache ihres größten Kreises. Wenn man daher diesen Kreis berechnet, und mit vier multiplicirt, so erhält man die Oberfläche der Kugel.

Anmerk. Noch bemerke man, daß sich die Inhalte der Kugeln wie die Würfel verhalten, deren Seitenlinien ihre Durchmesser sind. Den Beweis davon mag der Schüler unter Anleitung des Lehrers selbst finden.

Von Decimalzahlen.

121. Eine Zahl ist eine bestimmte Menge von gleichartigen Einheiten.

Zus. Die Zahl 6 besteht aus sechs Einheiten; die Zahl 24 aus vier und zwanzig Einheiten; aber 24 kann auch aus zwei Einheiten bestehen, nämlich aus 2 Dutzend. Hier wäre Dutzend auch als Einheit zu betrachten, nämlich als eine zusammengesetzte Einheit. Die Größe der Einheit ist daher veränderlich; ihr Begriff aber ist unveränderlich.

122. Decimalzahlen sind solche, welche nach dem decadischen Gesetz aus einander entspringen; das heißt, wobei immer zehn Einheiten einer niedern Ordnung eine neue Einheit der folgenden höhern Ordnung bilden.

Die Zahl 10 besteht aus zehn Einheiten, und kann für sich wieder eine besondere zusammengesetzte Einheit vorstellen, die, wenn sie zehnmal genommen wird, eine neue Einheit, nämlich 100 wird, so wie dieses Hundert, als neue Einheit, zehnmal genommen, 1000 heißt u. s. w.

123. Eine Zahl, welche kleiner als Eins, d. h. nur ein Stück von Eins ist, heißt eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. Wenn man die Brüche nach dem decadischen Gesetze, wie die ganzen Zahlen darstellt, so heißt man sie Decimalbrüche.

Decimalbrüche sind daher nichts anders, als eine Fortsetzung der Decimalzahlen bei Bestimmung der Größen, die zehnmal, hundertmal u. s. f. kleiner als Eins sind. So wie man daher sagte: Ein Hundert besteht aus 10 Zehnern, ein Zehner aus 10 Einern, so sagt man weiter: ein Einer besteht aus zehn Zehntheilen oder Zehnteln, ein Zehntel aus 10 Hundertteln, ein Hundertel aus 10 Tausendteln, ein Tausendtel aus 10 Zehntansendteln u. s. w.

Die Zahl acht und 4 Zehntel schreibt man so: 8, 4 oder 8. 4. Würde man das Comma oder den Punct auslassen, so wäre acht an der Stelle der Zehner, und nicht, wie es hier seyn sollte, an der Stelle der Einer. Fehlen aber die Einer oder Zehner ganz und man hätte bloß Decimalbrüche zu schreiben, so setzt man zuvor eine Null mit darauf folgendem Comma oder Punct z. B. 0, 25 d. i. 2 Zehntel und 5 Hundertel.

Der Kürze wegen spricht man die Ziffern 0, 25 lieber aus: 25 Hundertel, weil 2 Zehntel = 20 Hundertel sind. Weil eben so auch 20 Hundertel = 200 Tausendtel sind, so spricht man 0,254 aus: zwei hundert vier und funfzig Tausendtel. Man schreibe

also den Decimalbruch: sechs hundert und drei und achtzig Tausendtel so: 0,683.

Der Beweis hiervon ergibt sich leicht, wenn man nur diese Decimalbrüche als gemeine Brüche schreibt und mit 10 oder 100 in Zähler und Nenner dividirt, wodurch der Bruch unverändert bleibt.

124. Man soll Decimalbrüche addiren.

Man schreibe die Ziffer gleicher Ordnung unter einander, eben so wie bei ganzen Zahlen, und addire auch auf ähnliche Weise. Dann schneide man an der Summe von der Rechten zur Linken so viele Stellen ab, als sich an jenem der zu addirenden Brüche befindet, welcher deren am meisten hat. Der Beweis ist derselbe, wie bei ganzen Zahlen. Z. B.

39,24	14,209	0,6248
2,46	132,824	0,7327
41,70	147,033	1,3575

125. Decimalbrüche zu subtrahiren.

Man verfahre gleichfalls, wie bei ganzen Zahlen. Z. B.

87,84	3,7245	16,302
1,52	2,8024	4,516
86,32	0,9221	11,786

0,8732654	0,7319
0,39287	0,2617825
0,4803954	0,4701175

345	1
0,78324	0,64329
344,21676	0,35671

126. Decimalbrüche zu multipliciren.

Man betrachte alle Ziffer als ganze Zahlen und multiplicire sie auch so. Beim Producte werden dann überhaupt so viel Ziffern als Decimalstellen von der Rechten zur Linken abgeschnitten, als in beiden Factoren zusammen da waren. Z. B.

2,5	2,04	0,634
4,5	0,3	0,421
125	0,612	634
100		1268
11,25		2536
		0,266914

127. Decimalbrüche zu dividiren.

Man dividire anfangs wie bei ganzen Zahlen; nur bemerke man nachher folgende drei Fälle:

1) wenn im Dividenden und Divisor gleichviele Decimalstellen vorkommen, so bekömmt der Quotient keine Decimalstelle. Z. B.

4,33|290,11|67	0,593|4,151|7
2598	4151
4031	0
4031	
0	

2) Wenn aber der Dividend mehr Decimalstellen hätte als der Divisor, so bekömmt der Quotient so viele, als der Dividend mehr hat als dieser; Z. B.

```
I.  10,13|13,169|1,3
          1013
          ----
           3039
           3039
           ----
              0

II. 1321|224,57|0,17
         1321
         ----
         9247
         9247
         ----
            0

III. 4,01|0,09223|0,023
            802
            ----
            1203
            1203
            ----
               0
```

Hierher gehört auch folgender Fall, wenn der Divisor eine reine ganze Zahl ist, der Dividend aber ein Bruch; z. B.

```
15|0,36825|0,02455
   30
   --
   68
   60
   --
    82
    75
    --
     75
     75
     --
     00
```

Die beiden letztern Beispiele lehren zugleich, daß man noch Nullen zu Hülfe nehmen muß, um die nöthigen Decimalstellen im Quotienten zu erhalten.

Anmerk. Bisweilen scheint es jedoch, als ob nach der angeführten Methode der Quotient nicht immer heraus käme. Z. B. der Divisor sey 42, der Dividend 136,5; so ist der Quotient 3,25, wie sich auch aus der Probe durch die Multiplication ergibt. Allein hier blieb nach der Division ein Rest, welcher ebenfalls als Decimalbruch dem Quotienten angehängt wird, wie weiter unten vorkommt.

3) Wenn der Divisor mehr Decimalstellen als der Dividend hätte. In diesem Falle wird im Quotienten das Comma um so viel Stellen weiter rechts gesetzt, wodurch der Quotient alsdann zehnmal, hundertmal u. s. w. größer wird, als wenn gar keine Decimalstellen oder in beiden gleich viel wären. Z. B.

```
5,57|724,1|130,0
     557
     ----
     1671
     1671
     ----
        0
```

Man könnte hier im Quotienten auch 130 setzen, weil bloße Nullen hinter dem Comma keinen Werth haben. Wäre der Dividend derselbe, der Divisor aber 0,557, so würde der Quotient 1300 seyn, weil dann der Divisor zwei Decimalstellen mehr hätte u. s. w. Zur Uebung noch folgende Beispiele:

Divisor	Dividend	Quotient.
1,279	895,3	700
0,521	11983	2300
0,00163	3113,3	1910000

Anmerk. Sollte aber, wie in den meisten Fällen geschieht, ein Rest bleiben, so wird dieser nicht als gemeiner Bruch angeschrieben, sondern ist gleichfalls ein Decimalbruch. Selbst wenn man ganze Zahlen dividirt, kann man den Rest in einen Decimalbruch verwandeln, der, wenn er auch die Größe des gemeinen Bruchs nicht ganz genau angibt, ihm doch so nahe wie möglich gebracht werden kann. Dieß lehrt das hier Folgende.

128. Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Man hänge dem Zähler, der als ganze Zahl betrachtet wird, so viel Nullen an, als Decimalstellen gesucht werden, und dividire mit seinem Nenner, so gibt der Quotient den Decimalbruch. Z. B. $\frac{3}{4}$, wo man 4 in 3 dividirt.

```
4|3,00|0,75
  28
  --
   20
   20
   --
    0
```

also ist $\frac{3}{4}$ genau so viel als 0,75. Eben so $\frac{4}{5} = 0,8$.

```
5|4,0|0,8
  40
  --
   0
```

aber $\frac{5}{6}$ ist nicht völlig 0,83; genauer ist 0,833 u. s. w.

```
6|5,000|0,833 . . .
  48
  --
   20
   18
   --
    20
    18
    --
     2 u. s. w.
```

Auf gleiche Art verfährt man auch, wenn bei einer gewöhnlichen Division ein Rest bleibt, welcher ebenfalls in einen Decimalbruch verwandelt werden soll. Man erhält z. B. durch Division der Zahl 735 mit dem Divisor 8 den Quotienten $91\frac{7}{8} = 91{,}875$, nämlich

I. 8|735|91,875
72
15
8
70
64
60
56
40
40
0

Hier wurden dem Reste so lange Nullen angehängt, als es nöthig war. Diese haben aber keinen Werth, weil die Zahl 735 = 735,000.

II. 7|22|3,1428571 . . . . ins Unendliche, mit Wiederholung der Ziffer 142857.
21
10
7
30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
10

III. $\begin{array}{r|r|l} 9 & 32 & 3{,}55 \\ & 27 & \\ \hline & 50 & \\ & 45 & \\ \hline & 50 & \\ & 45 & \\ \hline & 5 & \end{array}$ . . ins Unendliche, mit Wiederholung der Ziffer 5.

Anmerk. Der Grund von dem bisherigen Verfahren, gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, läßt sich leicht einsehen, wenn man bedenkt, daß ein sogenannter ächter Bruch eine unvollendete Division anzeigt. Denn wenn z. B. 5 in 4 sich theilen sollen, so schreibt man $\frac{4}{5}$ d. i. 4 ist durch 5 zu dividiren oder, welches einerlei wäre, 5| 4 o| woraus sich der Quotient o,8 d. h. $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ergibt.

Anwendung der Decimalzahlen und Decimalbrüche bei Auflösung geometrischer Aufgaben.

129. Wenn (nach 73. Anmerk.) Quadrate als Einheiten zur Bestimmung des Flächeninhalts der Figuren dienen, so beschreibe man ein beliebiges Quadrat, dessen eine Seite, als die Grundlinie angesehen, in zehn gleiche Theile getheilt werde. Die daran liegende Seite, als die Höhe desselben betrachtet, werde in eben so viele und eben so große gleiche Theile eingetheilt. Zieht man durch die Theilungspuncte beider Linien parallele Linien mit Grundlinie und Höhe, so wird das große Quadrat in 100 unter sich gleiche Quadrate eingetheilt. Stellt man sich unter den zehn Theilen der Grundlinie und Höhe Zolle vor, so ist Grundlinie und Höhe einen Schuh groß und das Quadrat heißt ein Quadratschuh oder Quadratfuß, welcher folglich aus 100 Quadratzoll besteht. Will man sich aber unter den zehn gleichen Theilen der Grundlinie Schuhe denken, so ist das große Quadrat eine Quadratruthe, welche in 100 Quadratschuhe zerfällt u. s. w.

130. Ein gegebenes Rechteck zu berechnen.

Man messe dessen Grundlinie mit einem angenommenen Maßstabe; eben so die Höhe. Das Product beider gefundenen Maaße gibt den Flächeninhalt. Z. B. Grundlinie = 4 Schuh 6 Zoll, oder,

welches einerlei ist, 4, 6 Schuhe. Höhe = 3, 8 Schuhe.

```
     4,6
     3,8
     ---
     368
    138
   -----
Inhalt = 17,48
```

Wollte man hier zuvor alles in Zolle verwandeln, so würde das Product 1748 Quadratzolle seyn, diese durch 100 dividirt geben die darin enthaltenen Quadratschuhe (129), folglich wieder 17,48 Quadratschuhe. Der Kürze wegen bedeute: (°) Ruthe, (′) Schuhe, (″) Zolle, (‴) Linien und (□°) Quadratruthe u. s. w.

Ein anderes Rechteck sey gegeben, dessen

```
Grundlinie = 42,25′
     Höhe    1,15′
          -------
           21125
           4225
          4225
          -------
Inhalt = 48,5875□′ oder 48□′ 58□″ 75□‴
```

Eines andern Rechtecks

```
     Höhe = 2,3°
Grundlinie = 9,37°
          -------
           161
           69
          207
          -------
Inhalt = 21,551 □° oder 21□°, 55□′, 10□″.
```

Anmerk. Wenn man, aus dem gegebenen Inhalt und der Grundlinie, die Höhe; oder, aus Inhalt und Höhe, die Grundlinie berechnen will: so geschieht dieß durch die Division des Maases der Grundlinie oder Höhe in den Inhalt.

Gesetzt der Inhalt des Rechtecks sey = 29,987
die Grundlinie = 1,91

```
so ist 1,91|29,987|15,7 = Höhe
           |191
           ----
            1088
             955
            ----
            1337
            1337
            ----
               0
```

und umgekehrt würde, die gegebene Höhe in den Inhalt dividirt, zum Quotienten die Grundlinie geben.

Zus. Wenn der Inhalt eines schiefen Parallelogramms gefunden werden soll, so muß die Grundlinie und die senkrechte Höhe gemessen werden.

131. Ein gegebenes Dreieck zu berechnen.

Jedes Dreieck ist als die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe zu betrachten (68). Man verfahre also, wie beim Parallelogramme gelehrt worden (130), und nehme die Hälfte des Products.

```
3. B. Eines Dreiecks Höhe = 1,12'
            Grundlinie = 2,4'
                        -----
                          448
                         224
                       ------------
                       2|2,688|1,344 □'
```

folglich 1,344 □′ = dem Inhalt des Dreiecks. Kürzer verfährt man aber, wenn man zuvor entweder die Grundlinie oder die Höhe halbirt, wodurch die Division mit 2 weg fällt. Demnach würde das letzte Beispiel so gesetzt:

Höhe = 1,12′
h. Grundl. = 1,2′
224
112
Inhalt = 1,344 □′

Eines andern Dreiecks
Höhe = 4,16′
Grundlinie = 0,18′
daher Höhe = 4,16′
h. Grundlinie = 0,9′
Inhalt = 3,744 □′

der Grund hiervon liegt schon darin, weil, wenn man einem Dreieck ein Parallelogramm gleich machen will, man nur bei gleicher Höhe die Grundlinie zu halbiren hat. (69.)

Läßt man aber die Grundlinie unverändert, so halbirt man die Höhe. Z. B.

Grundlinie des Dreiecks sey = 8,19′
die Höhe = 5,16′
daher 8,19′ = ganze Grundlinie
2,58′ = halbe Höhe
6552
4095
1638
Inh. = 21,1302 □′ oder 21 □′, 13 □″, 2 □‴.

132. Man soll die Grundlinie eines Dreiecks aus Inhalt und Höhe, oder die Höhe desselben aus Inhalt und Grundlinie berechnen.

Da das halbe Product aus Grundlinie und Höhe den Inhalt des Dreiecks gibt, so hat man nur nöthig, die halbe Grundlinie in den Inhalt zu dividiren, um die Höhe; oder die halbe Höhe in den Inhalt zu dividiren, um die Grundlinie zu entdecken. Z. B. Höhe = 8′

Grundlinie = 4′

2|32| 16 □′ = Inhalt des △.

Dieser Inhalt = 16 durch die halbe Höhe = 4 dividirt gibt 4 zur Grundlinie; eben so die halbe Grundlinie = 2 in 16 dividirt, gibt 8 zur Höhe.

133. Man soll den Flächeninhalt eines Kreises berechnen, dessen Durchmesser gegeben ist.

Man suche zuvor die Peripherie des Kreises durch eines der oben angeführten Verhältnisse (92. Anm.). Am Bequemsten ist das Verhältniß 100:314. Hierauf multiplicirt man den Halbmesser mit der Peripherie, und dividirt das Product durch 2. Oder, welches nach dem Vorigen kürzer ist, man suche das Product aus dem vierten Theil des Durchmessers (= dem halben Radius) und der Peripherie. Z. B.

Der Durchmesser eines Kreises sey = 8,6′; so sagt man: wie sich der Durchmesser zur Peripherie überhaupt verhält, so verhält sich der gegebene Durchmesser zu seiner Peripherie. Oder nach dem angenommenen Verhältniße:

$$100:314 = 8{,}6:x.$$

```
   8,6
  ----
  1884
 2512
 ----------
100|2700,4|27,004 = Peripherie
```

der vierte Theil des Durchmessers = 2,15

```
             die Peripherie = 27,004
                             --------
                              135020
                              27004
                             54008
                             --------
Inhalt des Kreises = 58,05860 □′
```

Ein anderes Beispiel. Der Durchmesser = 12′

$$100:314 = 12:x$$

```
     12
    ----
    628
   314
  ----
100|3768|37,68′
```

der vierte Theil des Durchmessers = 3′

die Peripherie = 37,68′

Inhalt des Kreises = 113,04 □′

Anmerk. Berechnet man ferner aus den Verhältnißzahlen 100 und 314 den Inhalt des Kreises, nämlich aus dem Product von 25 und 314, so erhält man:

```
                 Peripherie = 314′
der vierte Theil des Durchmessers = 25′
                                  -----
                                  1570
                                  628
                                  -----
            Inhalt des Kreises = 7850 □′.
```

Ferner nimmt man das Quadrat des Durchmessers, nämlich 100 × 100 = 10000, so ergibt

sich ein neues Verhältniß: 10000 zu 7850 wie Quadrat des Durchmessers zum Inhalt des Kreises. Oder die beiden Zahlen durch 10 dividirt, ändert das Verhältniß nicht: 1000:785. So erhält man, wenn der Durchmesser gegeben ist, den Inhalt des Kreises kürzer. Z. B. Beim letzten Exempel war der Durchmesser 12′ gegeben, dessen Quadrat = 144. Daher

1000 : 785 = 144 : x
144
―――
3140
3140
785
―――
1000|113040|113,040 □′ = Inh. des Kreises.

Ein andres Beispiel:
der Durchmesser = 4,5′ daher
4,5
―――
225
180
―――
20,25 = Quadrat d. Durchmessers
1000 : 785 = 20,25 : x
785
―――
10125
16200
14175
―――
15,89625 □′ = Inhalt des Kreises.

Wem das Verhältniß 1000 : 785 nicht genau genug seyn sollte, der nehme das Verhältniß des Durchmesser-Quadrats zum Inhalt wie 452 : 355. Viele bedienen sich auch für gewöhnliche Fälle des Verhältnisses wie 14 : 11, welches mit ersterem übereinkommt.

134. Man soll den Flächeninhalt eines Kreises berechnen, dessen Peripherie gegeben ist.

In diesem Falle darf man nur das Verhältniß umkehren, so erhält man den Durchmesser. Das Verfahren bleibt dann das nämliche. Z. B.

Peripherie = 15,7″

314 : 100 = 15,7″ : x

100

314|1570,0|5,0 = Durchmesser

1570

0

der vierte Theil des Durchmessers = 1,25

Peripherie = 15,7

875

625

125

Inhalt des Kreises = 19,625□″

Anmerk. Es versteht sich, daß man hier das Verhältniß 1000 : 785 nicht so zweckmäßig gebrauchen kann, um kürzer zu rechnen. Wir wollen es hier nehmen, um die Probe über vorstehendes Beispiel zu machen.

Das Quadrat des Durchmessers = 25

daher 1000 : 785 = 25 : x

$$\begin{array}{r} 25 \\ \hline 3925 \\ 1570 \\ \hline 1000 \,|\, 19625 \,|\, 19{,}625 \,\square'' . \end{array}$$

Zus. Um aus dem Halbmesser des Kreises und aus dem Winkel des Ausschnittes die Größe dieses Ausschnitts zu finden, berechne man zuerst aus dem Radius des Kreises seinen Inhalt, und schließe sodann: 360° verhält sich zu dem Winkel des Ausschnitts, wie sich die Kreisfläche zur Fläche des Ausschnitts verhält. Es sey der Radius = 6′, der Ausschnittswinkel = 24°, so ist die Peripherie = $\frac{314 \times 12}{100}$ = 37,68′, dessen Fläche also = 37,68 × 3 = 113,04. Daher ist 360 : 24 = 113,04 : x oder 15 : 1 = 113,04 : x, welches x = $\frac{113{,}04}{15}$ = 7 Quadratfuß, 53 Quadratzolle gibt.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel.

135. Jede Zahl, mit sich selbst multiplicirt, gibt ihr Quadrat. Folglich ist eine Quadratzahl das Product von zwei gleichen Factoren, und ein solcher Factor heißt die Wurzel. Multiplicirt man aber wieder die Quadratzahl mit der Wurzel, so entsteht der Würfel oder Cubus.

Aus der Zahl 3, als Wurzel, entspringt die Zahl 9 als ihr Quadrat und die Zahl 27 als der Würfel. Daher sagt man: 9 sey die Quadratzahl von 3 und 27 die Cubikzahl von 3; die Zahl 3 ist aber beider Wurzel, und zwar die Quadratwurzel von 9, die Cubikwurzel von 27. Man schreibt dieß auch so: $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, das heißt $3 \times 3 = 9$, $3 \times 3 \times 3 = 27$. Ferner $\sqrt{9} = 3$ und $\sqrt[3]{27} = 3$, welches heißt: die Quadratwurzel von 9 ist 3, und die Cubikwurzel von 27 ist 3.

136. Man nennt die Producte gleicher Factoren auch Potenzen. Daher ist das Quadrat die zweite Potenz, der Cubus die dritte. Durch fortgesetzte Multiplication erhält man die vierte, fünfte u. s. w. Potenz. Ueberhaupt: 2, 3, 4 u. s. f. gleiche Factoren geben den zweiten, dritten, vierten u. s. f. Grad der Potenz.

Die Zahl 16 kann aus der Wurzel 2 und 4 entspringen, denn $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, oder

$2^4 = 16$ und $4 \times 4 = 16$, oder $4^2 = 16$, daher schreibt man $\sqrt{16} = 4$ und $\sqrt[4]{16} = 2$.

Anmerk. Daß die Wörter Quadrat und Würfel aus der Geometrie entlehnt sind, fällt in die Augen; dort fand man den Inhalt eines Quadrats, wenn man eine Seite mit sich selbst multiplicirt (73. Anmerk.) eben so den Inhalt eines Würfels, wenn man das Quadrat seiner Seitenfläche oder Grundfläche mit der Seite eines solchen Quadrats oder seiner Höhe multiplicirte (109. Anmerk.)

137. Durch die Multiplication entdeckt man das Quadrat einer jeden Zahl, als Wurzel. Hier ist die Wurzel gegeben und das Quadrat wird gesucht. Man soll aber auch die Wurzel finden lernen, wenn das Quadrat gegeben ist.

Für die ersten 9 Zahlen sind die Quadrate wie folget:

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Mit Hülfe dieser sucht man die Wurzel aller übrigen Quadratzahlen auf folgende Art:

1. Man theile die ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, jede von zwei Ziffern. Die letzte Classe kann auch eine Ziffer haben.
2. Von der letzten Classe suche man die zunächst kleinere Quadratwurzel, um dann ihr Quadrat von dieser Classe abzuziehen. Die Wurzel wird gewöhnlich zur Rechten neben die Quadratzahl geschrieben.
3. Man setze jetzt die folgende ganze Classe zu

dem Reste der letzten Classe, verdopple in Gedanken den gefundenen Theil der Wurzel und dividire in das Herabgesetzte, mit Uebergehung der letzten Ziffer, um den neuen Wurzeltheil zu erhalten. Dieser wird erst mit sich selbst und nun mit dem Divisor multiplicirt und das Ganze von jenem abgezogen.

4. Zu dem Rest setzt man die folgende Classe der Quadratzahl, betrachtet es wieder als ein Ganzes und nachdem man den zweiten Wurzeltheil hinter den ersten geschrieben, verdoppelt man beide, als ein Ganzes betrachtet, und dividirt eben so in das Herabgesetzte, mit Uebergehung der letzten Ziffer u. s. f.

Folgendes Beispiel wird dieses erläutern:

```
Quadratzahl | Wurzel
23|42|56    | 484
16|  |      |
 742
 704
  3856
  3856
     0
```

Die Quadratzahl 234256 bekommt 3 Classen. von der letzten 23 wird das nächst niedrige Quadrat 16 abgezogen und die Wurzel von 16, nämlich 4, angeschrieben. Zu dem Reste 7 wird die folgende Classe 42 gesetzt und in die ersten Ziffern 74 mit dem verdoppelten Wurzeltheil $2 \times 4 = 8$ dividirt, so

erhält man 8 als neuen Wurzeltheil. Dieses 8 wird mit dem Divisor, dann mit sich selbst multiplicirt, welches (gehörig addirt) 704 gibt und, von 742 abgezogen, 38 als Rest läßt. Hierzu kommt die dritte Classe 56. Mit dem verdoppelten nunmehrigen Wurzeltheil 48, nämlich 96, wird in 385 dividirt, dessen Quotient 4 ist der neue Wurzeltheil, der erst mit 96, dann mit sich selbst multiplicirt, 3856 gibt, welches vom Herabgesetzten 3856 subtrahirt 0 übrig läßt.

Würde man die ganze Wurzel 484 mit sich selbst multipliciren, so erhielte man obige Quadratzahl 234256. Dieß wäre die Probe, ist aber so wenig, wie bei andern arithmetischen Aufgaben, der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens, welcher hier übergangen wird.

Ein andres Beispiel.

Quadratzahl	Wurzel
5 | 61 | 69	237
4 |	
161	
129	
3269	
3269	
0	

Es geschieht oft, daß man von einer Zahl, welche keine vollständige Quadratzahl ist, die Wurzel ziehen soll. In diesem Fall muß man am Ende durch Hinzusetzung von Nullen, wie bei der Divi-

sion mit Decimalbrüchen, sich der Wurzel zu nähern suchen. Doch hier mit dem Unterschied, daß man für jede neue Classe zwei Nullen hinzufügt. Aus dem Bisherigen ergibt sich nämlich, daß die Anzahl der Classen mit der der Wurzeltheile übereinstimmt, so daß eine Quadratzahl von 2 Classen auch eine zweitheilige Wurzel u. s. f. hat.

Aus der Zahl 8682, die keine Quadratzahl ist, wird die Wurzel gezogen, wie folget:

Zahl	Wurzel
86 | 82	93,17 . . .
81	
582	
549	
33,00	
1861	
143900	
130389	
13511 . . .	

So könnte man fortfahren, um sich der Wahrheit gleichsam immer mehr zu nähern. Um sich aber zu überzeugen, daß die Rechnung richtig ist, so multiplicire man 93,17 mit sich selbst und addire zum Producte den Rest 13511, so wird die Zahl 8682 wieder herauskommen. Das Quadrat von 93,17 ist nämlich 8680,6489
jener Rest 13511

8682,0000

Für die Zahl 3 oder 3,000 . . ist die Quadratwurzel 1,732 oder genauer 1,732050 . . u. s. w.

Zus. Auf gleiche Art wird man zu Werke gehen, wenn aus einem Decimalbruche die Quadratwurzel gezogen werden soll. Aus einem gemeinen Bruche zieht man die Quadratwurzel, wenn man sie aus dem Zähler und Nenner zieht. Wenn diese aber keine vollständigen Quadratzahlen sind, so suche man die Wurzel durch Näherung. Z. B.

$$\sqrt{\tfrac{36}{49}} = \tfrac{6}{7}, \text{ denn } \tfrac{6}{7} \times \tfrac{6}{7} = \tfrac{36}{49}$$

eben so:

$$\sqrt{\tfrac{16}{81}} = \tfrac{4}{9}, \text{ denn } \tfrac{4}{9} \times \tfrac{4}{9} = \tfrac{16}{81}$$

Anmerk. 1. Da die Ausziehung der Cubikwurzel für Anfänger noch mehr Schwierigkeiten hat, auch seltner verlangt wird, so wird diese hier übergangen. Am Ende dieses Buches folgt eine Tabelle der Quadrat- und Cubikzahlen von 1 bis 100.

Anmerk. 2. Zur Erläuterung dieses Abschnitts muß Vieles der Nachhülfe des Lehrers überlassen werden, welcher den Schülern auch etwas Weniges von der Theorie beibringen wird. (Der Herausgeber.)

Von der Ausrechnung der Körper.

138. Man soll den Inhalt eines gegebenen Prisma finden.

Es ist (110, Zus. 2) bereits erwähnt worden, daß der Inhalt eines Prisma, so wie eines Parallelepipedum durch das Product aus dem Maaße der Grundfläche in das Maaß der Höhe ausgedrückt werde.

Man bestimmt also zuerst die Grundfläche des gegebenen Prisma, welche, wenn sie ein Parallelogramm ist, durch das Product aus Höhe und Grundlinie, wie bereits gelehrt worden, gefunden wird, und multiplicire ihr Maaß sodann mit dem Maaße der Höhe des Körpers, z. B.

Grundlinie = 3,4′
Höhe = 1,2

68
34

ganze Grundfläche = 4,08 □′
Höhe des Prisma = 8,5′

2040
3264

Inhalt des Prisma = 34,680 Cubikfuß.

Ein dreieckiges Prisma sey gegeben, von dessen Grundfläche die

Grundlinie = 2,5′
die Höhe = 0,8′ ist,

so wird 2| 2,00| 1,00 □′ = Grundfläche;
oder man nehme die halbe Höhe = 0,4
Grundlinie = 2,5

so ist die Grundfläche 1,00 □′
Höhe des Prisma = 6,4

400
600

Inhalt des Prisma = 6,400 Cubikfuß.

Anmerk. 1. Wenn aber die Grundfläche des Prisma ein Polygon ist, so wird dieses zuerst in Dreiecke zerlegt, die man besonders berechnet und ihre Summe als die Grundfläche des Prisma betrachtet, welche dann mit dem Maaße der Höhe desselben multiplicirt, den Inhalt des Prisma gibt.

Anmerk. 2. Im gemeinen Leben kommen dergleichen Berechnungen öfters vor, weil viele regelmäßige Körper mit Prismen Aehnlichkeit haben, z. B. ein Balken, eine Mauer. Von vielen andern möchte man gerne den Inhalt des körperlichen Raums, den sie einschließen, wissen, z. B. den Inhalt eines Kastens, Schranks, einer Stube.

139. Man soll den Inhalt einer Pyramide finden.

Da Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen gleichen körperlichen Inhalt haben (115) und der Inhalt der Pyramide ausgedrückt wird durch den dritten Theil des Products aus dem Maaße der Grundfläche in jenes der Höhe (116),

so sey einer Pyramide Grundfläche = 12,2 □′, die Höhe = 10,5′; daher

$$\begin{array}{r} 12{,}2 \\ 10{,}5 \\ \hline 610 \\ 122 \\ \hline 3 \mid 128{,}10 \mid 42{,}70 \end{array}$$

Cubikfuß ihr Inhalt.

140. Man soll den Inhalt eines Cylinders berechnen.

Der Inhalt eines Cylinders wird, wie der eines Prisma gefunden, weil man die Grundfläche eines Cylinders, nämlich den Kreis, als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet. (91. Zus. 2.) Z. B.

Der Diameter der Grundfläche sey = 8 und man nehme das Verhältniß 113 : 355 um die Peripherie zu finden. (92.)

$$113 : 355 = 8 : x$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 113 \mid 2840 \mid 25{,}132\ \ldots = \text{Peripherie} \\ 226 \\ \hline 580 \\ 565 \\ \hline 150 \\ 113 \\ \hline 370 \\ 339 \\ \hline 310 \\ 226 \\ \hline 84 \end{array}$$

die gefundene Peripherie 25,132 werde mit dem vierten Theil des Diameters multiplicirt, um den Inhalt des Kreises zu finden, also hier mit 2

```
                                   25,132
                                        2
                                   ------
                                   50,264
die Höhe des Cylinders sey  =       5,6'
                                   ------
                                   301584
                                  251320
                                  -------
                      Inhalt = 281,4784 Cubikfuß.
```

Von einem andern Cylinder z. B. einer Säule sey die Höhe und die Peripherie gegeben, man suche den Inhalt. Es sey die Peripherie = 5,5'

```
355 : 113 = 5,5
             55.
           -----
            565
           565
           -----
355| 6215 | 17,5 . .
     355
     ----
     2665                  Durchmesser = 17,5
     2485                  Peripherie  =  5,5
     ----                               ------
      1800                                875
      1775                               875
     -----                              ------
        25                         4| 96,25 | 24,06 . .
                                      8
                                     ---
                                      16
                                      16
                                     ----
                                     025
```

Die Grundfläche also = 24,06 □′
die Höhe sey = 10,5

12030
2406

der Inhalt der Säule = 252,630 Cubikfuß.

Anmerk. Auf diese Art findet man auch den Inhalt aller cylindrischen Gefäße, weil der körperliche Raum wie ein Körper selbst betrachtet wird.

141. Man soll den Inhalt eines Kegels suchen.

Da der Kegel sich zur Pyramide verhält, wie der Cylinder zum Prisma (118) so wird er eben so berechnet werden müssen, als eine Pyramide. Man suche also hier zuerst, wie bei dem Cylinder, den Inhalt der Grundfläche, multiplicire ihn hierauf mit dem Maaße der Höhe und dividire durch 3. (116). Der Durchmesser der Grundfläche sey = 24″, dessen Quadrat = 576

die Höhe = 219″; daher

1000 : 785 = 576 : x
576

4710
5495
3925

1000 | 452160 | 452,160 □″ = Grundfläche.
219 = Höhe

4069440
45216
90432

3 | 99023,040 | 33007,680 Cub.″ = Inhalt; das ist 33 Cub.′ 7 Cub.′ 680 Cub.‴

142. Man soll den Inhalt einer Kugel und ihre Oberfläche berechnen, wenn ihr Diameter gegeben ist.

1. Suche man den Inhalt der Kugel (120) indem man die Fläche seines größten Kreises (92) mit dem Diameter, und hierauf dies Product mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt.

der Durchmesser sey = 2,5 daher weil das Quadrat des Diameters = 6,25

$$1000 : 785 = 6,25 : x$$

```
        6,25
        3925
       1570
      4710
1000 |4906,25| 4,90625 = Inhalt des größten
                                Kreises:
                        4,90625
             Diameter =     2,5
                        2453125
                        981250
Inhalt des Cylinders = 12,265625
   mit 2/3 multiplicirt        2
                    3 |24,531250 | 8,177083
```

folglich der Inhalt der Kugel = 8,177083 Cubikfuß, d. h. 8 Cub. Fuß, 177 Cub. Zolle, 83 Cub. Linien.

2. Die Oberfläche der Kugel ist ferner viermal so groß, als die größte Kreisfläche. (120. Zus. 2.)

Inhalt des größten Kreises 4,90625
$$\underline{4}$$
daher Oberfläche = 9,62520 □'.

Zus. Auf eine kürzere Weise wird der Inhalt der Kugel berechnet, wenn man ein Verhältniß ausfindig macht, wie sich der Cubus des Diameters zum Inhalte der Kugel verhält. Man nehme z. B. 100: 314. Hier ist der Cubus des Diameters, nämlich $100^3 =$ 1000000. Ferner:

Peripherie = 314
der vierte Theil des Diameters = 25
1570
628
größte Kreisfläche = 7850
100
Inhalt des Cylinders = 785000
2
3 | 1570000 | $523333\frac{1}{3}$.

Dieser Inhalt der Kugel $523333\frac{1}{3}$ so wie der Cubus werden, des Verhältnisses unbeschadet, beide noch mit 3 multiplicirt

$523333\frac{1}{3}$
3
1570000

1000000 $\times$ 3 = 3000000.

Eben so beide mit 10000 dividirt, geben das Verhältniß: 300: 157 = Cubus des Diameters zum Inhalt der Kugel.

Man nehme obiges Beispiel, wo Diameter = 2,5, dessen Cubus = 15,625 daher

$$
\begin{array}{r}
300 : 157 = 15,625 : x \\
157 \\
\hline
109375 \\
78125 \\
15625 \\
\hline
300 \,|\, 2453,125 \,|\, 8,17708
\end{array}
$$

Cubikfuß als der Inhalt der Kugel.

Anmerk. Die Aufgaben:

1. Den Umfang eines senkrechten Cylinders.
2. Den Umfang eines senkrechten Kegels.
3. Den Umfang der Parallelepipeden, und anderer Prismen.
4. Den Umfang der Piramiden.
5. Den Körperinhalt eines parallel abgekürzten senkrechten Kegels.
6. Den Körperinhalt einer parallel abgekürzten Pyramide

zu berechnen, wird der wißbegierige Schüler, unter Anleitung des Lehrers, leicht selbst auflösen können.

Einige Sätze der practischen Geometrie.

143. Die Feldmeßkunst oder Geodäsie ist die Wissenschaft, die Entfernungen der Oerter, den Flächeninhalt kleinerer oder größerer Figuren auf der Oberfläche unsrer Erde richtig zu messen und die zu messenden Stücke alle nach ihrer Ordnung, Verhältniß und Lage auf das Papier zu tragen.

Anmerk. Das Geschäft dieser Wissenschaft wäre demnach ein zweifaches, nämlich das Ausmessen, und das Zeichnen oder Entwerfen. Beide können aber nicht von einander getrennt seyn, weil kein richtiger Entwurf ohne vorhergegangene sorgfältige Messung Statt findet und man durch denselben sich erst einen deutlichen und anschaulichen Begriff von dem, was man gemessen hat, machen kann.

144. Die Figur, welche der Feldmesser entwirft, muß auf den Horizont oder Gesichtskreis reducirt seyn; oder mit andern Worten, sie muß so gezeichnet seyn, als wären nirgends Erhöhungen und Vertiefungen, sondern allenthalben eine solche Ebene, wie sie die Oberfläche eines ruhigen Wassers darstellt.

Anmerk. 1. Dieser Satz hat für Anfänger der Geometrie etwas Unbegreifliches. Sie können sich nicht überzeugen, daß ein Stück Land, welches an dem Abhang eines Bergs oder Hügels liegt und auf diesem Boden ohne Rücksicht auf

den Berg gemessen, gleichen Flächenraum mit einem andern hat, das auf ebenem Felde liegt, dennoch kleiner angesehen werde, als letzteres. Dieß ist aber dann erst begreiflich, wenn man sich den Querdurchschnitt eines Berges, unter einem rechtwinkligen Dreiecke Fig. 9. vorstellt, dessen Hypotenuse ab den Abhang des Berges, und die eine Cathete a c die Horizontalfläche vorstellt. Hier wird die Linie ab durch die Linie a c gemessen. Denn wollte man auf den Abhang ab ein Haus bauen, so müßte es doch perpendiculär auf a c und nicht auf ab angenommen werden, oder stünden auf ab Gewächse, so würde es so aussehen, als ob sie perpendiculär auf a c aufgerichtet wären, folglich könnten eben dieselben alle auf a c stehen. Ein Baum, der auf dem Abhang ab perpendiculär stünde, würde schief stehen und die unter ihm stehenden Gewächse im Wachsthum hindern. Aus dieser kurzen Betrachtung wird sich die Richtigkeit des angeführten Satzes ergeben.

Anmerk. 2. Eine nach diesem Grundsatze entworfene Figur kann also nicht die Summe aller Flächen auf Erhöhungen und Vertiefungen einer Gegend darstellen, sondern gibt blos den Raum an, welchen diese Figur auf einer darunter liegenden Horizontalfläche einnimmt und ist daher kleiner als im ersten Fall, aber dafür auch nie einer Veränderung unterworfen; welche die krumme Fläche z. B. durch Ausfüllen der Gräben, Abtragen der Hügel ꝛc. immer erleiden kann.

Ueberhaupt läßt sich noch dieses anführen, daß alle horizontale Vermessungen leichter bewerkstelligt werden, als solche, die gegen den Horizont geneigt sind, und auf diese Art zugleich anschaulicher werden.

145. Eine Vertical-Ebene auf dem Felde abzustecken.

Was die Neigung einer Ebene auf einer andern Ebene sey, ist bereits oben erklärt worden (105). Steht eine andere Ebene auf einer Horizontal-Ebene senkrecht, so ist erstere eine Vertical-Ebene. Um eine solche auf dem Felde abzustecken, bedient man sich gerader Stäbe, welche man senkrecht in die Erde steckt. Man folgt hierin gewöhnlich seinem Augenmaaße; genauer aber geschieht es mit Hülfe eines Bleiloths, welches man unverrückt in der Hand hält und damit, wenn es frei schwebt, die senkrechte Stellung der Stäbe vergleicht. Bei einiger Uebung wird dieses bald entbehrlich.

Die Absteckstäbe müssen gerade, cylindrische, 5 bis 6 Fuß hohe Stangen seyn, welche unten eine eiserne Spitze haben.

Anfangs muß man oft nachsehen oder visiren, ob diese Stäbe alle in eine Vertical-Ebene fallen. Ist dieses der Fall, so sagt man, sie decken sich.

Anmerk. 1. Der Nutzen, den eine richtig abgesteckte Vertical-Ebene hat, muß alsbald einleuchten, wenn man bedenkt, daß die Entfernung zweier Puncte, welche auf dem Felde durch diese Stäbe bezeichnet werden, durch eine gerade Linie gemessen wird (3). Es wären daher zwei solcher Stäbe schon hinreichend; allein, um sicher zu messen, werden in diese eingebildete gerade Linie gerne noch mehrere Stäbe hinter einander in beliebiger Entfernung gesteckt, zumal wenn die Weite der Oerter etwas beträchtlich ist.

Anmerk. 2. Ueberhaupt kann man sich bei den Figuren, die auf der Horizontal-Ebene gedacht worden, da, wo Buchstaben stehen, immer Absteckstäbe denken, weil diese, eben so wie jene, die Grenzen der geraden Linien bezeichnen sollen.

146. Man soll eine abgesteckte Vertical-Ebene über einen Hügel beliebig erweitern.

So lange man ungehindert die Fläche übersieht, in welcher man Stäbe steckt, kann der eine Beobachter ruhig hinter dem ersten Stabe stehen bleiben, um die Arbeit des andern oder das Abstecken zu berichtigen. Sobald dieser aber beim Fortgehen an einen Hügel kommt, den der erste nicht von seinem Standpuncte aus übersehen kann, verfahren sie auf folgende Weise.

Wenn die Stäbe a, b, c sich decken, so steckt man einen Stab in d, so daß sich ebenfalls b, c, d decken, hierauf in e und f, so daß nach und nach c, d, e und d, e, f alle in gleicher Ebene liegen. Man befestigt aber nicht eher einen neuen Stab in der Erde, als bis er sich mit wenigstens zwei vorhergehenden deckt. Daß wegen des Hügels die Stäbe b, c, und d, e, ziemlich nahe beisammen stehen werden, ergibt sich von selbst. Die Ursache aber, warum man jedesmal nach drei Stäben visiren muß, um dieselbe Vertical-Ebene fortzusetzen, ist leicht zu finden; denn durch die zwei vorhergehenden ist nur eine einzige Ebene bestimmt, welche der dritte fortsetzen soll, dagegen durch einen vorhergehenden Stab allerlei

Ebenen möglich sind, welche ein darauf folgender verlängern kann.

147. Man soll eine gerade Linie auf einem ebenen Felde messen.

Dieß kann auf verschiedene Art geschehen:

1. Durch einen Maaßstab, welcher Messruthe heißt. Gewöhnlich ist derselbe eine gerade hölzerne Stange, 10 Fuß lang, oder hält eine Ruthe, welche in ihre Schuhe und Zolle eingetheilt ist. Man gibt demselben gewöhnlich eine Breite von zwei und eine Dicke von einem Zoll, und verfertigt ihn von Tannen- oder Büchenholz, das wohl ausgetrocknet ist. Doch kann er eben so gut rund als vierkantig seyn.
2. Durch die Meßkette, deren Glieder eiserne, 1 Schuh lange, Stäbe und durch Ringe mit einander verbunden sind, damit sich die ganze Kette, welche 3 bis 5 Ruthen lang ist, zusammen legen läßt. Die einzelnen Ruthen macht man aber durch größere Ringe bemerkbar und an beiden Enden der Meßkette sind ebenfalls ganze weite Ringe befindlich, welche in die Kettenstäbe gesteckt werden, wodurch die ganze Meßkette gehörig ausgespannt wird. Mit der Meßkette läßt sich das Ausmessen viel schneller bewerkstelligen, als mit dem Maaßstabe.

Die Handgriffe und Vorsichtsregeln,

welche hierbei in Anwendung kommen, werden am besten durch die Uebung erlernt. Bei Messungen mit Maaßstäben kann man übrigens, um nicht aus der Richtung der geraden Linie zu kommen, eine gehörig lange Schnur von einem Absteckstabe zum andern ausspannen, und daran hinmessen.

148. Man soll eine gerade Linie auf einem unebenen Felde oder über Erhöhungen hinweg messen, oder mit andern Worten: auf den Horizont reduciren.

Dieser Fall kommt sehr häufig vor, ob er gleich aus Bequemlichkeit oder Unwissenheit mancher sogenannter Feldmesser oft gar nicht berücksichtigt wird. Da, wo der Boden im Ganzen eben, und seine Fläche nicht sehr von der Horizontalfläche abweicht, ist, zumal wenn keine besondere Genauigkeit verlangt wird, der Fehler des Messers so groß nicht. Sobald aber die Erhöhungen beträchtlich sind, verfährt man auf folgende Weise.

Man nehme zwei gewöhnliche Maaßstäbe, welche in ihre Fuße und Zolle eingetheilt sind, aber beide an dem einen Ende Spitzen oder Stacheln haben, um sie in die Erde stecken zu können. Figur 61 sey ab der eine verticale Maaßstab und cd der horizontale oder die Setzlatte. Beide werden, wie hier der Fall ist, mit einander verbunden, so daß sie mit ihren Stacheln fest in der Erde stecken, ab völlig senkrecht und cd horizontal.

Der sogenannte Horizontalabstand der Puncte b, d, ist hier = be und wird auf der Setzlatte angegeben, wo man die Schuhe do zählen kann. In Figur 60 sey ab der verticale Maaßstab, bc die Setzlatte. Nachdem man bc gefunden, setzt man in der Vertical-Ebene den Maaßstab ab in dc, die Setzlatte bringt man ebenfalls nach de u. s. f. Auf diese Art erfährt man den Horizontalabstand der Puncte a und m, wenn man bc, de, fg, hi, kl, addirt, deren Summe der Weite am gleich seyn muß. Denn jene Linien sind den ihnen in gleichen Parallelogrammen gegenüberstehenden Seiten ao, op, pq, qr, rm gleich und letzte sind die sämmtlichen Theile der Linie am.

Anmerk. 1. Um eine horizontale Linie oder Ebene zu erhalten, bedient man sich entweder einer richtigen Setzwage oder, was größere Genauigkeit gewährt, einer sogenannten Wasserwage. Der Raum verstattet es nicht, von diesem, so wie von mehrern andern Instrumenten des Feldmessers, Zeichnung und Beschreibung zu geben.

Anmerk. 2. Sollten indessen die Erhöhungen der Ebene unbedeutend seyn, so hat man die Setzlatte nicht nöthig, sondern man darf nur die Meßkette horizontal über die zu messenden Puncte ausspannen und zwar entweder nach dem Augenmaaße, oder um sicherer zu seyn, dieß mittelst einer Setzwage berichtigen.

149. Man soll die Lage einer krummen Linie auf ebenem Felde bestimmen.

Es sey Fig. 62 die krumme Linie uoc auf einer

Ebene gegeben. Man nehme willkührlch die gerade Linie a v an, stecke sie ab, und nenne sie Abscissenlinie, oder Normallinie; die Linien a b, a d, a f, a i, a l ꝛc. heißen die Abscissen und die Perpendikel b c, d e, f g ꝛc. die Ordinaten, so sieht man leicht, daß die krumme Linie durch die Abscissen und Ordinaten bestimmt werde. Die Puncte c, e, g ꝛc. werden immer an den vorzüglichsten Krümmungen der krummen Linie angenommen, und je nachdem größere oder geringere Schärfe beim Entwurf verlangt wird, werden mehr oder weniger Abscissen und Ordinaten Statt finden müssen. Wenn man also letztere sämmtlich gemessen hat, so läßt sich die krumme Linie durch die angenommene gerade bestimmen.

Auf diese Art läßt sich also jede krummlinige Figur aufnehmen, wenn man an ihren Seiten solche Abscissenlinien annimmt. Leichter wird aber die Arbeit, wenn man sie ihrer Länge nach von einer geraden Linie durchschneiden läßt, und auf beiden Seiten derselben die Ordinaten setzt, welche bis an die hervorstechendsten Puncte ihres Umfangs reichen, damit man aber die Ordinaten, welche auf der einen Seite der geraden Linie liegen, mit denen nicht verwechsele, welche auf der andern liegen, so bezeichne man die erstern etwa mit dem Zeichen (+), die andern mit (—).

150. Man soll perpendiculäre Linien auf dem Felde ziehen.

Man hat verschiedene Methoden, dieses zu bewerkstelligen.

1. Auf der Linie ad (Figur 63) sey das Perpendikel bc zu errichten. Man nehme eine Meßkette und umspanne damit das Dreieck abc, so daß ab = 5 Schuh oder Ruthen lang ist, ac = 4 und bc = 3 solcher Theile als ab hat, so ist abc ein rechtwinkliges Dreieck, welches bei c den rechten Winkel hat. Denn das Quadrat von 5 ist gleich der Summe der Quadrate von 3 und 4 d. i. 25 = 16 + 9 (74). Man kann statt der Zahlen 3, 4, 5 auch andere nehmen, wenn nur das Quadrat der größern Zahl, wie sich von selbst versteht, der Summe der Quadrate der beiden übrigen gleich ist. Z. B. die Zahlen 6, 8, 10. Es ist aber hierbei zu bemerken, daß drei Personen an den Puncten a, b und c die Kette straff anziehen müssen, und daß c auf die gerade Linie ad fallen muß.

2. Ein leichteres Verfahren, Perpendikel hier zu fällen, gewährt ein Instrument, mit Namen Winkelkreuz. Es ist dieß eine runde Scheibe von trocknem Holz, von etwa 9 Zoll im Durchmesser, mit zwei sich rechtwinklig durchschneidenden Diametern, wie Figur 64, welche erst darauf gezeichnet und dann etwa einen halben Zoll tief eingesägt werden. Dieses Instrument

ist sehr einfach und ruhet nur auf einem Fuß, der aber mit einer eisernen Spitze versehen seyn muß. Man sieht leicht ein, daß, wenn das Winkelkreuz perpendiculär über einem gewissen Punct aufgerichtet steht, der Mittelpunct c ganz in dieß Perpendikel, und z. B. be in die auf dem Felde abgesteckte gerade Linie fallen müsse. Visirt man nun durch be und ad, so liegen die Gegenstände, also auch Absteckstäbe, welche man durch diese Einschnitte erblickt, mit dem Punct c unter rechten Winkeln und die hiernach abgesteckten Linien werden folglich Perpendikel seyn.

Zus. Hieraus ergibt sich zugleich eine Methode, wie man auf dem Felde Parallellinien ziehen kann. Man errichtet nämlich auf einer gegebenen geraden Linie Perpendickel von gleicher Länge mit einander und zieht durch die Endpuncte derselben eine gerade Linie, welche mit der ersten parallel laufen wird, weil man hier ein Rechteck construirt hat.

151. Man soll einen verjüngten oder tausendtheiligen Maaßstab entwerfen.

Dieser Maaßstab ist von sehr ausgebreitetem Nutzen und für Feldmesser ganz unentbehrlich. Man nehme eine gerade Linie ad (Figur 65) und theile sie in etliche gleiche Theile, wie hier in drei, errichte auf ihrem Ende das Perpendikel ae und theile es in 10 gleiche Theile, welche von a nach e

mit 1, 2, 3 ꝛc. bezeichnet werden. Welches Verhältniß ae zu ab habe, ist gleichgültig. Durch diese 10 Theilungspuncte ziehe man Parallelen mit ad und errichte noch andere Perpendikel auf den Puncten b, c, d. Ferner theile man auch die Linie ab in zehn gleiche Theile, schreibe eben so von b nach a die Zahlen 1, 2, 3 ꝛc. an die Theilpuncte, und ziehe von 9 nach e eine gerade Linie, dann durch den Punct 8 mit dieser eine Parallele und so fort durch die Puncte 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Das Dreieck e a 9 enthält wegen der mit der Seite a 9 in ihm parallel laufenden Linien viele ähnliche Dreiecke (94) und diese Parallelen stehen unter sich im Verhältniß, wie die Zahlen 1, 2, 3, 4 ꝛc. Von der Linie a 9 hat man also alle Zehntheile durch die Parallelen gegeben, die Linie a 9 selbst ist aber ein Zehntheil von ab. Eben so verhält sichs mit den übrigen Linien des Maaßstabs. Dieses ab = bc = cd kann eine Ruthe vorstellen. Man könnte also auf diesem Maaßstabe Ruthen, Schuhe und Zolle nehmen. Man soll z. B. von einer gewissen Figur auf dem Felde eine gerade Linie aufs Papier tragen, welche 2° 4′ 5″ oder 245′, hätte. Setzt man hier die beiden Spitzen eines Zirkels in d und b, so hätte man 2°, eröfnet man denselben weiter und nimmt auf der Linie ad die Linie d 4, so hätte man 2° 4′; um nun noch die 5″ zu erhalten, setzt man den Zirkel in die fünfte Parallele und nimmt, wie hier bezeich-

net ist, ho, so hat man 2° 4′ 5″, welche Linie man aufs Papier bringt und auf gleiche Weise mit allen Linien der Figur verfährt. So wird diese zuletzt verjüngt, oder nach Proportion ihrer Theile verkleinert, auf dem Papier entworfen seyn.

So wie hier der ganze Maaßstab in 3 Theile eingetheilt ist, eben so läßt er sich auch in 10 theilen und auf gleiche Art können diese zehn Theile nicht bloß Ruthen, sondern auch Schuhe vorstellen, in welchem Falle dann die übrigen Zolle und Linien werden. Dieß ist willkührlich. Eine Ruthe läßt sich also in ihre Zehntheile d. i. Schuhe, in ihre Hunderttheile und Tausendtheile d. i. Zolle und Linien eintheilen, und daher heißt der verjüngte Maaßstab auch der tausendtheilge Maaßstab.

Wenn man will, kann man auch diesen Maaßstab nach dem Duodecimalmaaß oder auf andere beliebige Art eintheilen.

Anmerk. Es versteht sich von selbst, daß, wenn man bei einer gewissen Arbeit einen verjüngten Maaßstab gebraucht, man denselben nicht mit einem andern, der davon verschieden wäre, vertauschen muß, bis man mit dieser Arbeit zu Ende ist.

152. Einen gegebenen Winkel auf das Papier zu tragen.

Das gewöhnliche Instrument, das man zu diesem Zweck gebraucht, heißt Transporteur. Wenn man nämlich die ganze Peripherie des Kreises in 360 gleiche Theile oder Grade eintheilt (83. Zus. 3.)

so kommen auf den Halbkreis 180 Grade. Läßt man sich einen solchen Halbkreis von Holz, Messing, Horn oder Pappe verfertigen, und theilt ihn in eben so viele Theile, bezeichnet ferner das Centrum des Kreises, wozu er gehört, so heißt er Transporteur.

Wenn man dessen Diameter so an eine gerade Linie legt, daß das Centrum auf dem Endpuncte dieser Linie, welcher hier a heißen soll, steht, so zählt man, von der geraden Linie an gerechnet, so viele Grade auf dem Transporteur, als der gegebene Winkel hat. Wären dieß z. B. 30 Grade, so wird da, wo der 30ste Grad des Transporteurs hinweist, auf dem Papier ein Punct gemacht, der c heißen soll. Zieht man jetzt von a nach c eine gerade Linie, so ist der gegebene Winkel auf dem Papier entworfen.

153. Die Größe eines Winkels auf dem Felde zu bestimmen.

Hierzu ist in den meisten Fällen ein besonderes Instrument nöthig, wenn man gleich bisweilen mit Hülfe der Absteckstäbe und eines Transporteurs die Größe solcher Winkel angeben kann. Denn gar oft kann man die Größe der drei Seiten eines Dreiecks bestimmen, das Dreieck nach dem verjüngten Maaßstab auf dem Papier entwerfen und dann diesen Winkel durch den Transporteur messen, der wegen Aehnlichkeit der Dreiecke hier derselbe seyn muß (94. Anm. 1).

Von den verschiedenen Winkelmessern führe ich hier zuerst, wegen seines ausgebreiteten Nutzens das Astrolabium an, welches, wenn es zumal mit einem Vernier und Fernrohr versehen ist, fast nichts zu wünschen übrig läßt.

Ganz einfach genommen, stelle man sich darunter einen Transporteur vor, der aber größer als ein gemeiner und mit einem auf dem Centrum beweglichen Lineal versehen ist. Die eine Seite des Lineals läuft in gleicher Linie mit dem Diameter des Transporteurs. Damit man dies Lineal in eine gerade Linie mit einem oder etlichen Absteckstäben auf dem Felde bringen kann, so ist an beiden Enden desselben eine Vorrichtung zum visiren angebracht, welche man Dioptern heißt und die mit dem Lineal beweglich sind. Zwei andere Diopteru aber an beiden Enden des Diameters sind unbeweglich.

Beim Gebrauch wird ein solches Astrolabium, welches gewöhnlich auf einem Stativ von drei Füßen ruht, zuerst horizontal und mit seinem Centrum über den Punct gestellt, der auf dem Felde die Spitze des Winkels bezeichnet. Hierauf wird der Diameter vermittelst seiner Diopteru in die Lage der einen abgesteckten Linie oder des einen Schenkels des Winkels gebracht und eben so das bewegliche Lineal des Astrolabiums (Diopterlineal) in den andern Schenkel. Nach dieser Vorbereitung zählt man hier, wie beim Transporteur, die Grade

jenes Winkels, und schreibt sie für jeden vorher bezeichneten Winkel auf, um zu Hause die ganze Figur, deren Winkel und Seiten auf dem Felde gemessen worden, verjüngt nachzuzeichnen.

Das sogenannte Meßtischchen oder die Mensel ist ein auf einem Stativ ruhendes Reißbrett mit einem Diopterlineal, auf welchem man die auf dem Felde vorkommenden Winkel sogleich zeichnen, auch ganze Figuren entwerfen kann. Sein Erfinder war zu Anfang des 17. Jahrhunderts Joh. Prätorius, Prof. der Mathematik zu Altdorf, von dem es auch den Namen, Prätorianisches Tischchen, erhalten hat. Um das Reißbrett horizontal zu stellen, gebraucht man meist eine Wasserwaage und zur Feststellung in dieser Lage dienen ein Paar darunter angebrachte Holzschrauben. Damit aber der Punct auf dem Brett genau über dem Puncte auf dem Felde steht, bringt man eine sogenannte Gabel an, an welcher das Bleiloth herabhängt.

Auch die Zollmannische Scheibe, die Boussole, die Quadranten dienen zur Bestimmung der Winkel auf dem Felde. Die Quadranten haben vor den übrigen gewisse Vorzüge, deren ich hier noch erwähnen will. Denn, erstens sind sie zu Höhenmessungen vielleicht die bequemsten Instrumente. Zweitens, läßt sich ihr Halbmesser ziemlich groß annehmen, wodurch die Grade auf dem Rande ebenfalls groß ausfallen und sich so leichter in

kleinere Theile mit ziemlicher Deutlichkeit zerlegen lassen. Ihre Größe macht sie aber weder schwerer noch kostbarer als die halben oder gar als die ganzen Kreise der Astrolabien. Sollten nun beim Aufnehmen der Winkel solche vorkommen, die über 90° gehen, so kann man ja diese in zwei oder drei andere zerlegen. Ueberhaupt vermeide man so viel als möglich die zu stumpfen, so wie die zu spitzen Winkel, weil hierbei leicht Fehler begangen werden. Sehr nützlich sind übrigens die Fernröhre, welche man au dergleichen Winkelmessern anzubringen pflegt, wenn zumal die Puncte, nach denen visirt werden soll, sehr entfernt sind.

Anmerk. Sobald aber eine größere Genauigkeit im Aufnehmen der Winkel verlangt wird, reicht die gewöhnliche Eintheilung in Grade, selbst in halbe und viertel Grade, nicht mehr hin. Man verlangt dann auch den 60sten Theil eines Grades oder die Minute zu wissen. Um solche schärfere Ausmessungen vorzunehmen, ist die Geometrie allein unzulänglich. Ein geschickter Feldmesser wird daher auch die sogenannte Trigonometrie, oder rechnende Dreiecks-Lehre verstehen müssen; wovon die ersten Elemente in dem letzten Abschnitte dieser Schrift entwickelt werden.

154. Man soll die Entfernung zweier Objecte auf dem Felde bestimmen, die sich wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht geradezu messen läßt. Man kann aber von einem dritten Standpuncte zu beiden visiren und messen.

Auflösung. A. Ohne Instrument.

Wenn wegen eines Hindernisses bei k (Fig. 66) die Linie bc nicht gemessen werden kann, so setze man seitwärts in a einen Stab, von wo man nach b und c gehen und messen kann, verlängere hierauf die Linie ca durch Absteckstäbe rückwärts nach d, so daß ca = ad; eben so die ba nach e, daß ba = ae, so hat man bei a Scheitelwinkel, welche einander gleich sind (45). Die sie einschließenden Seiten sind ebenfalls gleich, daher △ abc ≌ △ ade, (34.) folglich auch die Seite bc = de, welche jetzt gemessen werden kann.

Zus. Findet sich aber hinter a, nach d und e zu, ein Hinderniß, so nehme man auf ab die Hälfte, das Viertel oder Sechstel dieser Linie, eben so diesen Theil der ac auf ac; und gesetzt, diese wären ao und ap, daß ao : ab = ap : ac, so hat man △ aop ∾ △ abc (97) folglich ist op der so vielste Theil von bc, als ao von ab. Wenn z. B. ab = 16° und ao = 4°, op wäre = 5°, so würde op = 20° seyn u. s. f. Fände sich aber noch zwischen op ein Hinderniß, so läßt sich vielleicht an = ao und am = ap nehmen, so würde mn = op seyn.

Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß die Linien ao, ap oder am, an auf das Schärfste müssen gemessen werden, weil, wie leicht zu erachten, ein kleiner Fehler hier bei der Bestimmung

von b c so viel größer wird, als a b größer ist wie a o.

B. Mit einem Instrumente.

Nachdem man die Linien a b und a c als Seiten des Dreiecks a b c gemessen hat, nehme man auch den Winkel b a c mit Hülfe eines Astrolabiums auf. Da auf solche Art ein Winkel mit den ihn einschließenden Seiten gegeben ist, so ist das Dreieck bestimmt (34) und kann nun verjüngt auf das Papier getragen und hier die b c gemessen werden.

Wenn man sich aber des Meßtischchens bedient, so würde in diesem Falle, wie in den folgenden, sogleich auf dem Felde der Winkel nebst dem ganzen Dreieck auf dem Papier entworfen.

Anmerk. Hierbei eine Bemerkung, welche für alle folgende Fälle gilt. Wenn man sich nämlich des Astrolabiums bei Vermessungen bedient, so muß man immer Papier, oder ein Schreibtäfelchen nebst Bleistift bei sich führen. Man entwirft darauf zuvor nach dem Augenmaaße die zu messende Figur in ihren Theilen, und bezeichnet dieselbe durch Buchstaben, welche auf die Absteckstäbe Bezug haben, so daß gleichsam im voraus jeder Winkel und jedes Dreieck seine Benennung hat. Einen solchen rohen Entwurf nennt man gewöhnlich Brouillon. Hält man sich aber daneben ein besonderes Register über die Größe der Winkel und Linien, so heißt dieses das Manual.

155. Man soll die Entfernung zweier Gegenstände auf dem Felde bestimmen, wenn man von einem dritten Orte nur zu einem derselben kommen kann.

Auflösung A. Ohne Instrument.

Wenn wir (Figur 66*) uns vorstellen, als könnten wir wohl von a nach c kommen und messen, aber zwischen a und b sey gleichfalls ein Hinderniß, wie zwischen b und c, so tragen wir zuerst die Linie ca ebenfalls rückwärts nach d. Sobald wir nun aus a den Punct b erblicken, können wir auch die Linie ba rückwärts verlängern, nur mit dem Unterschiede, daß wir dort den Punct d bestimmen konnten, indem wir ad = ac nehmen, welches bei e nicht angeht. Wir müssen uns also auf eine andere Art zu helfen suchen. Gesetzt, wir könnten bei c ein Dreieck crs abstecken, das bei s rechtwinklig wäre, so brächten wir die Seite cs nach dt, den rechten Winkel bei s nach t, indem wir hier nämlich ein Perpendikel errichten, daß tu = rs wäre. Hierauf verlängere man die du bis sie die ae schneidet, welches auf dem Felde so geschiehet, indem bei a ein Beobachter unverwandt so lange nach e zu visirt, bis ein anderer, auf der Verlängerung von du fortschreitend, von jenem in seiner Ziellinie erblickt wird und dann ein Zeichen bekömmt, daß er stehen bleibt und einen Stab, hier in e, einsteckt. So erhält man de = bc. Denn △ ade ≌ △ abc, weil eine Seite in beiden, ad = ac, und die daran liegenden Winkel auch gleich sind, nämlich ∢ oap = ∢ man als Scheitelwinkel und ∢ rcs = ∢ tdu, weil sie gleich gemacht wurden. (35).

B. Mit einem Instrumente.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß, wenn man die Winkel b c a und b a c aufgenommen und die davon eingeschloßenen Seiten gemessen hat, das ganze Dreieck auf dem Papier nach dem verjüngten Maaßstabe entworfen werden kann. Man wird dann sagen können, daß das gezeichnete Dreieck dem auf dem Felde angenommenen ähnlich sey, folglich sind alle 3 Seiten des einen, den 3 Seiten des andern proportional.

Zus. 1. Dieser und der vorhergehende Fall gestatten noch eine besondere Auflösung, nämlich durch das Winkelkreuz (150. 2.). Man nehme an (Figur 68) daß die Linie a b nicht gemessen werden könnte und trage das Winkelkreuz nach a, visire a b und a c, stecke in c einen Stab, dessen Entfernung von a gleichgültig ist. Wenn man nach b kommen kann, so visirt man auch b a, b d; doch ist dies nicht durchaus nöthig. In c visire man den rechten Winkel a c d, befestige zwischen c und d ein paar Stäbe und suche den Punct d, im Fall b d noch nicht bestimmt ist, indem man in der Gegend von d so lange auf und abgehend die d c nebst der d b zu einem rechten Winkel vereinigt findet, welches so schwer nicht ist. Daß nun c d b a ein Rechteck, und folglich c d = a b sey, ist leicht einzusehen.

Zus. 2. Auch könnte man an b a die Linie a n

unter einem Winkel von $\frac{2}{3}$ R = 60° legen und in diesem Schenkel so lange fortgehen, bis auch z. B. anb = 60° wäre. In diesem Falle ist an = ab; an kann aber leicht gemessen werden.

156. Man soll den Abstand zweier Puncte auf dem Felde messen, zu deren keinem man kommen kann.

Auflösung A. Ohne Instrument.

Es seyen a und b (Fig. 67) zwei Puncte z. B. jenseits eines Flusses und der Beobachter befinde sich diesseits, etwa in c, wo er diese Puncte sehen kann. Hier stecke er einen Stab hin und verlängere nun ac rückwärts nach g zu, und eben so die bc nach f. Man könnte auch cg und cf von gleicher Länge machen; doch ist dieß willkührlich. Aber der Punct d muß mit a und f und der Punct e mit b und g in gerader Linie liegen.

Hierauf werden alle Seiten der Dreiecke dcf, fcg und gce gemessen und ihre Größe aufgeschrieben.

Trägt man nun dieselben in eben der Ordnung, wie hier, aufs Papier und verlängert nur noch die Linien fd, fc, gc, ge nach a und b, so hat man ähnliche Dreiecke erhalten. Wenn man nämlich die auf dem Felde befindlichen in eben der Ordnung mit A, B, C ꝛc. bezeichnet, so wäre △fga ∾ △FGA und △fgb ∾ △FGB, weil für beide Dreiecke fg proportional der FG und

∡ afg = ∡ AFG, auch ∡ fga = ∡ FGA; ferner ∡ bfg = ∡ BFG und ∡ fgb = ∡ FGB. Da nun auch alle Seiten dieser Dreiecke den Seiten der Dreiecke auf dem Felde proportional sind, so werden folglich auch ag und gb der AG und GB proportional seyn und ∡ agb = ∡ AGB; (weil ∡ fgb = ∡ fga = ∡ agb) daher auch △ agb ∾ △ AGB (97) und also auch ab = AB.

B. Mit einem Instrumente.

Um eben diese Entfernung mit einem Astrolabium zu messen, begibt man sich (Figur 67) nach f und g und mißt nach und nach die Winkel afg, fga, bfg, fgb und die Seite fg. Hierauf trägt man alles dieses in gehöriger Ordnung auf das Papier, so entstehen die Dreiecke afg und fgb. Der Beweis ist der vorige.

Anmerk. Man wird aus diesem allen sehen, daß der letzte Fall fast immer in Anwendung kann gebracht werden, wenn die Weite zweier Oerter soll gemessen werden. Nur ist hier in Ansehung der Standlinie fg zu merken, daß diese nicht zu klein angenommen werden darf, damit die Winkel, welche hier zusammentreffen, weder zu stumpf, noch zu spitz werden. Uebung und Beurtheilung müssen lehren, wie diese Linie zu wählen sey.

Man vergesse übrigens bei diesem und vorhergehenden Fällen nicht, daß, da die Standlinie horizontal genommen wird, eben so auch die Puncte, deren Horizontalabstand man messen will, liegen müssen, oder doch keine beträchtliche Schiefe gegen einander haben dürfen. Hiernach richtet sich nun auch die Stellung des Instruments.

157. Man soll die Höhe eines Gegenstandes messen, zu dessen Fuß man kommen kann.

Sollte dieß die Höhe eines Hügels seyn, so wäre es in den meisten Fällen besser, wenn man dieselbe stückweise, mit Hülfe des verticalen und horinzotalen Maaßstabes oder der Setzlatte (148.) ausfindig zu machen suchte. Im Fall es aber eine Mauer, ein Thurm und dergleichen wäre, so verfahre man, wie folget.

Wenn (Figur 69) CD die zu bestimmende Höhe wäre, und man könnte von B nach C auf horizontaler Ebene kommen, so messe man BC, stelle hierauf das Astrolabium in verticale Lage über B, daß dessen Centrum etwa in b sey, visire die horizontale Linie bc parallel mit BC und dann bd, um den ∢ dbc zu erhalten. Der ∢ dcb muß ein rechter seyn.

Wenn man aus den hier gefundenen Stücken, nämlich einer Seite und den an ihr anliegenden zwei Winkeln, ein Dreieck auf dem Papier entwirft, (97) welches dem großen ähnlich ist, so bekömmt man die Seite dc, welche, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, die wahre Höhe des Gegenstandes angibt. Hierzu addirt man noch die Höhe des gebrauchten Instruments cC = bB, so erhält man die ganze Höhe Cd.

158. Man soll die Höhe eines Gegenstandes messen, zu dessen Fuß man nicht hinkommen kann.

Wenn man (bei Figur 69) sich vorstellt, als

befände sich zwischen B und C ein Hinderniß, und man sollte dennoch die Höhe Cd bestimmen, so begebe man sich zuerst nach A und messe AB. Man bringe ferner das Instrument nach A, daß sein Mittelpunct hier etwa bei a sey und nehme den Winkel dab, hierauf auch bei B den ∢ dbc, nachdem man vorläufig schon den Punct c, wohin man jedesmal visirte, von gleicher Höhe über C, als a über A und b über B ist, bestimmt hatte. Aber des Winkels dbc Nebenwinkel ist dba, welcher leicht gefunden wird, wenn man den ∢ dbc von 2 R oder 180° abzieht. (44) Hier hat man denn wieder eine Seite ab und die daran liegenden Winkel bestimmt und trägt daher das ganze △ abd auf das Papier, verlängert hierauf beliebig die Grundlinie ab nach c und fällt von d ein Perpendikel nach c, welches im verjüngten Maaß die wahre Höhe des Gegenstandes angeben wird. Wer noch daran zweifelt, daß das Dreieck bcd auch bestimmt seye, der erinnere sich an den Satz, daß zwei Winkel und eine Seite (hier bd, durch das vorhergehende Dreieck bestimmt,) welche einem der gegebenen Winkel gegenübersteht (hier dem rechten Winkel bei c) zwei Dreiecke congruent machen (47).

Anmerk. Man nehme die beiden Standpuncte A und B nicht so nahe beisammen an, eben so darf BC im Verhältniß zu Cd nicht zu groß seyn, wenn anders der ∢ adb nicht zu spitz werden soll, welches beim Entwerfen manche Nachtheile bringt.

159. Man soll eine Höhe messen, zu deren Fuß man zwar kommen, jedoch nicht in horizontaler Ebene hinmessen kann.

Man kann die Auflösung dieser Aufgabe unter vier Hauptfälle bringen.

1. Fall. Es sey (Figur 70) die Höhe a d gegeben, zu deren Fuß man von b nach d in abhängiger Ebene kommen kann. Man messe zuerst die b d, hierauf die beiden Winkel a b c und c b d, indem man die horizontale Linie b c als den gemeinschaftlichen Schenkel beider Winkel am besten durch einen Quadranten oder auf andre Weise bestimmt. Auf diese Art erhält man zuerst das Dreieck b d c, in welchem eine Seite, die b d, und zwei Winkel, nämlich c b d und der rechte ∢ b c d, gegeben sind. (47) Indem man nämlich von d ein Perpendikel auf die Linie b c, hier in c, fallen läßt, und dieses Perpendikel verlängert, so wird es die b a in a schneiden. Also wird auch das Dreieck b c a entstehen, wozu durch das vorhergehende die Seite b c nebst den daran liegenden Winkeln (denn a c b ist ein rechter) gegeben sind. Die Linie a d wird also im verjüngten Maaße die Höhe angeben.

Anmerk. Daß der Punct b hier, wie in den folgenden Fällen das Centrum des Winkelmessers bezeichne, ergibt sich aus der Figur.

2. Fall. Die Höhe a d (Figur 70) soll gefunden werden, aber man kann nicht von b nach d kommen, sondern etwa nur bis e, weil zwischen e und d ein Hinderniß im Wege wäre. Man verfahre Anfangs wie zuvor beim ersten Fall und nehme die Winkel a b c und c b d auf; hierauf wird b e gemessen. Bei e werden ferner auch die Winkel a e m und m e d aufgenommen. Wenn man diese gefundene Stücke in der gehörigen Ordnung auf dem Papier entwirft, so erhält man zuerst das △ e b a, in welchem die Seite e b nebst den daran liegenden Winkeln a b e (= a b c + c b d) und der Winkel b e a als Nebenwinkel von a e d (= a e m + m e d) gegeben sind. Wo sich hier b a und e a durchschneiden wird ein Perpendikel auf die Horizontallinie b c gefällt und dasselbe bis d verlängert. Hieraus entsteht das △ a c b, folglich ist die Größe von b c bestimmt, und die daran liegenden Winkel c b d und b c d (Winkel R) sind gleichfalls gegeben; daher auch △ b c d bestimmt ist, und c d ist eine Seite desselben. Die Höhe a d ist daher = a c + c d.

3. Fall. Auf der abhängigen Ebene e m (Figur 71) kann man zu dem Fuße der Höhe a m gelangen, welche gemessen werden soll.

Man messe zuerst die gerade Linie e m, hierauf nehme man in e den ganzen Winkel

aed, nachdem zuvor die Horizontallinie ed bestimmt worden ist. Von diesem Winkel wird der ∢ aem, welcher gleichfalls gesucht worden ist, abgezogen, um ∢ med zu erhalten. Man trägt diese Stücke auf das Papier und fällt von dem Puncte m ein Perpendikel auf ed und verlängert es rückwärts nach a zu, bis es die Linie ea schneidet. Die Höhe am, nach dem verjüngten Maaß gemessen, wird die wahre Höhe des Gegenstandes bestimmen.

Denn von dem △ ade ist durch das Perpendikel md der rechte Winkel ade und die Seite de bestimmt; der ∢ aed ist auch bekannt, folglich ist das auf dem Papier entworfene Dreieck ade dem großen ähnlich. Da jetzt auch durch dasselbe Dreieck die Seite ae gegeben ist, und ∢ aed und die Seite em schon vorher bekannt waren, so ist auch das Dreieck aem durch einen Winkel und die daran liegenden Seiten bestimmt.

4. Fall. Wenn aber, bei Bestimmung derselben Höhe am, die Linie em nicht ganz gemessen werden könnte und z. B. zwischen c und m ein Hinderniß befindlich wäre, so ließe sich dieselbe auf folgende Art ausfindig machen.

Man messe die Linie ec, so wie die beiden Winkel aem und acm. Der ∢ ace ist der Nebenwinkel von acm. Da hier vom △ ace eine Seite und die daran liegenden Winkel

bekannt sind, so trage man es auf das Papier, nachdem man auch den ganzen Winkel aed aufgenommen hat. Man fälle jetzt vom Punct a ein Perpendikel auf ed und verlängere die ec bis m, so hat man am als die verlangte Höhe.

Denn durch das Perpendikel ad ist das rechtwinklige Dreieck ade bestimmt, und durch die Verlängerung von ec bis m die Seite cm des △ acm, dessen andere Seite ac aber durch das △ ace; und ∢ acm ist gemessen worden. Folglich ist △ acm auf dem Papier dem großen Dreieck auf dem Felde ähnlich (97.)

Zus. Die Höhe eines Gegenstandes z. B. eines Baums, läßt sich noch auf eine andere Art, nämlich aus der Länge des Sonnenschattens, finden. Man errichtet zu dem Ende einen Stab von beliebiger Länge senkrecht auf der Erde und mißt zu einerlei Zeit die Länge des Schattens, welchen sowohl jener Gegenstand, als dieser Stab hinter sich wirft, und hierauf noch die Höhe des Stabs selbst. Dann sagt man: wie sich der Schatten des Stabs zu seiner Höhe verhält, eben so verhält sich der Schatten des Gegenstandes zu dessen Höhe. Dieses wird durch ein Exempel der sogenannten Regel de Tri leicht berechnet, weil hier die drei ersten Stücke gegeben, und das letztere zu suchen ist.

Man sieht aber, daß die Anwendung dieses Verfahrens nur da Statt findet, wo man bis zu dem Fuße des Gegenstandes unmittelbar hinmessen kann.

Anmerk. Noch gibt es folgende Methoden, diese Höhen zu messen, welche der Lehrer dem Schüler erklären wird:

1. Durch Hülfe eines Stabes, in dessen oberer Spalte sich ein bewegliches Lineal befindet;
2. Durch Hülfe eines Spiegels;
3. Aus zwei über einander stehenden Fenstern eines hohen Gebäudes;
4. Durch verschiedene sogenannte Höhenmesser.

160. Man soll eine geradlinige Figur, die man von einem Standpunct aus übersehen kann, nach dem verjüngten Maaßstabe zu Papier bringen. Man nennt dieses eine Figur in den Grund legen.

Nachdem man an alle Endpuncte der geradlinigen Figur 52 die Absteckstäbe A, B, C, D, E gesteckt hat, so wähle man z. B. den Punct A und bringe hier das Meßtischchen oder Astrolabium hin, um die durch die Diagonalen entstandenen Winkel BAC, CAD, DAE, aufzunehmen. Hierauf messe man die Seiten AB, BC, CD, DE, EA und trage sie folgendermaßen aufs Papier. Gesetzt die zu entwerfende Figur sey abcde. Man setze zuerst nach dem verjüngten Maaßstabe ab an den einen Schenkel des Winkels BAC; vom Puncte b an lege man an den andern Schenkel dieses Winkels die bc,

daß er AC hier in c schneidet, hierauf die cd und eben so die de, so wird ea als die noch übrige Linie gleichfalls nach dem verjüngten Maaße soviel halten, als die EA nach dem großen. Aus diesem ergeben sich nun die Verhältnisse AB:BC = ab:bc und ferner AC:CD = ac:cd u. s. f. Man bemerke aber noch, daß die Linien bc, cd, de die Linien ac, ad, ae an zwei Orten schneiden können; aber schon das Augenmaaß wird lehren, wie der ∠abc beschaffen seyn müsse, um dem ∠ABC gleich zu werden.

Zus. 1. Sollte aber die geradlinige Figur sich nicht so bequem in Dreiecke durch Diagonalen zerlegen lassen, wie (Fig. 53) ABCDEFGA, so ließe sich vielleicht durch die Hülfslinie AF ein solches Polygon bilden, welches wie die vorhergehende Figur zu behandeln wäre. Da man hier aber noch das △AGF erhält, welches nicht dazu gehört, so wird dieses von der ganzen Figur abgezogen, nachdem man dieselbe verjüngt auf dem Papier entworfen hat. Hier ist nämlich das △agf dem großen △AGF ähnlich.

Zus. 2. Man kann übrigens ein solches Polygon, wie Fig. 52. darstellt, noch auf mehrere Arten in den Grund legen. Ich erwähne hier zugleich der Methode, wie man vermittelst des Meßtischchens oder Astrolabiums sie von einem Punct in der Mitte aus in Grund legt. Um

sich davon einen anschaulichen Begriff zu machen, zeichne man ein solches irreguläres Polygon. Gesetzt, es habe fünf Seiten, wie hier, und die Ecken der Figur seyen mit den fünf Buchstaben A, B, C, D, E bezeichnet, welche auf dem Felde Absteckstäbe vorstellen. Von einem beliebigen Punct in der Mitte werden fünf gerade Linien nach diesen Ecken gezogen, so erhält man 5 Dreiecke. Nachdem man nun alle Winkel um den Mittelpunct, so wie die sie einschließenden Seiten gemessen hat, kann man denselben, in eben der Ordnung genommen, ähnliche zeichnen, so daß auch aus dem ersten Polygon ein zweites, ihm ähnliches, entsteht.

Anmerk. Hierbei bemerke ich, daß die Figuren, von denen hier die Rede ist, alle in horizontaler Ebene gedacht werden. Wäre dieß nicht, so daß etwa ein oder der andere Theil höher als die übrigen lägen, so müßte man sie erst auf den Horizont reduciren. (148.)

161. Man soll eine krummlinige Figur auf dem Felde aus ihrem Umfang entwerfen und zu Papier bringen.

Man sieht leicht ein, daß hierbei von oben erwähntem Verfahren, krumme Linien auf dem Felde zu entwerfen, Gebrauch gemacht werden muß. (149.)

Wenn die krummlinige Figur 72. e m n o p q r gegeben ist, welche z. B. einen Teich vorstellen soll und diese von der geradlinigen A B C D einge-

schlossen wird, so kann man sich hier mit Vortheil des Winkelkreuzes bedienen, um auf jeder Seite der geradlinigen Figur Perpendikel zu fällen. An den hervorstechendsten Puncten e, m, n 2c. werden dann die Ordinaten zu stehen kommen und diese werden sogleich mit ihren Abscissen Aa, Ab 2c. gemessen und ins Brouillon eingetragen. Sobald man alle Ordinaten und Abscissen gemessen hat, ist man im Stande, die Figur auf dem Papier nach dem verjüngten Maaßstabe zu entwerfen.

Zus. 1. Man begreift leicht, daß eine solche krummlinige Figur nicht bloß aus ihrem Umfange von aussen her in Grund gelegt werden kann, sondern daß auf die nämliche Art auch innerhalb derselben eine geradlinige Figur kann abgesteckt werden. Bei dieser werden dann gleichfalls Abscissen und Ordinaten angenommen.

Ferner läßt sich diese Methode nicht bloß bei krummlinigen Figuren anwenden, sondern sie wird bei geradlinigen von gleichem Vortheil seyn; so wie denn überhaupt manche Feldmesser bei ihren Arbeiten fast kein anderes Werkzeug zu kennen scheinen, als das Winkelkreuz.

Zus. 2. Ich erwähne hier noch eine Art, eine krummlinige oder auch geradlinige Figur in Grund zu legen, von der man sehr häufig Gebrauch machen kann. Anstatt nämlich, wie

so eben gezeigt wurde, innerhalb derselben eine neue geradlinige Figur anzunehmen, ziehe man durch ihre ganze Länge eine einzige gerade Linie, als Absciſſenlinie, und nehme darauf die nöthigen Ordinaten an. Wenn man diese Stücke gehörig gemessen und zu Papier gebracht hat, so darf man nur die Endpuncte der Ordinaten mit einander in Verbindung bringen. Alles dieses muß dem Anfänger durch Zeichnungen deutlich gemacht werden. Auch muß er sich selbst in solchen theoretisch-practischen Verrichtungen üben.

162. Man soll von einer willkührlich angenommenen Standlinie aus, eine Figur auf dem Felde nach ihren verschiedenen Puncten in Grund legen.

Dieser Satz ist einer der wichtigsten in der practischen Geometrie, da er zu Vermessungen ganzer Länder kann in Anwendung gebracht werden.

Um die entlegenen Puncte d e h i c (Figur 73) zu bestimmen, nehme man die willkührliche Standlinie a b an und messe sie genau. Hierauf nehme man beim Standpunct a die Winkel i a c, i a b, h a e, e a b, b a d und d a c auf. Eben dieß geschieht nachher beim Standpunct b mit den Winkeln d b e, e b h, h b i, i b a, a b c und c b d. Wenn diese Stücke ins Brouillon eingetragen sind, so hat man die Arbeit auf dem Felde vollendet und kann zu Hause den Entwurf ausarbeiten. Daß aber die hier vorkommenden Dreiecke a i b, a h b, a e b,

a b d und a b c alle bestimmt sind, läßt sich dadurch beweisen, weil in allen eine Seite, nämlich die ab, und die daran liegenden beiden Winkel gegeben sind (35). So ist z. B. von △ a b e der Winkel e a b aufgenommen und der andere ∢ e b a ist durch die Summe der 3 Winkel e b h, h b i und i b a ausgedrückt, u. s. f. Nun sind aber durch die Dreiecke zugleich ihre Endpuncte i, h, e, d, c, bestimmt, welche man daher nur noch durch gerade Linien mit einander zu verbinden hat, um die ganze Figur darzustellen.

Weil ferner durch die Bestimmung der Lage und Entfernung zweier Puncte, wie hier z. B. der Puncte i und c, eine neue Standlinie gleichsam gegeben ist, welche man nicht weiter zu messen nöthig hat, so kann man von hier aus die Lage neuer Puncte und Dreiecke auf die vorbeschriebene Art bestimmen und durch Fortsetzung dieser Arbeit zuletzt ganze Gegenden und Länder aufnehmen, wobei, wie leicht zu erachten, ein gutes Instrument ganz unentbehrlich seyn wird. Auch ist es wichtig, daß die anfängliche Standlinie a b in horizontaler Ebene auf das allergenaueste gemessen werde, weil sonst der Fehler in alle darauf gegründete Dreiecke übergehen würde.

Anmerk. Man sieht übrigens, daß dieser Satz sich auf einen andern, bereits oben erwähnten, gründet, welcher lehrt, wie man vermittelst einer angenommenen Standlinie die Entfernung zweier unzugänglichen Oerter mißt. (156.)

163. Man soll eine auf dem Felde gegebene Figur, in zwei gleiche Theile zerlegen.

Zuerst messe man den Inhalt der ganzen Figur, und suche die Hälfte davon im Flächenmaaße zu bestimmen. Wenn nun die gegebene Figur ein Parallelogramm ist, so braucht man nur die Grundlinie oder Höhe zu halbiren, um sogleich die Scheidungslinie zu finden. Ist sie aber ein Dreieck, so halbirt man die Grundlinie und zieht von der Mitte derselben eine gerade Linie nach der Spitze des gegenüberstehenden Winkels (67).

Sollte aber, wie dieß am häufigsten der Fall ist, die Figur irregulär seyn, und man hat ihren Inhalt ausfindig gemacht, so nehme man zuerst eine willkührliche Theilungslinie an, die, weil sie selten die wahre ist, auf folgende Art noch berichtigt wird.

Es sey z. B. (Figur 74) a b d e in zwei gleiche Theile zu theilen, und der Inhalt des Ganzen sey 9240 □′; folglich die Hälfte = 4620 □′. Wenn nun durch die zufällige Theilungslinie c f, der eine Theil nämlich hier c d e f = 4837 □′ groß gefunden würde, so wäre es um 217 □′ zu groß. Es müssen daher diese 217 □′ dem einen Theile genommen und dem andern zugegeben werden, der nur 4403 □′ hätte, damit beide gleichviel haben. Man denke sich diese 217 □′ als den Inhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie c f = 62′ wäre, so müßte (nach 132) die Höhe = 7′ seyn, denn

$$\begin{array}{r|r|l} 31 & 217 & 7 \\ & 217 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Da nun durch Grundlinie und Höhe das △ cfg gegeben ist, so setze man es dem kleinen Theil zu, indem man auf der Grundlinie cf ein Perpendikel, als die Höhe des neuen Dreiecks, errichtet, dessen Inhalt = 217 □′ hält, damit 4403 + 217 = 4620, und eben so beim größern Theil 4837 — 217 = 4620 □′ werde.

164. Man soll eine gegebene Figur in mehrere gleiche Theile theilen.

Das Verfahren ist im Ganzen das vorige, nur daß man zuerst den Inhalt in die verlangten Theile z. B. 4. eintheilt. Wäre der Flächeninhalt = 9240 □′, so müßte jeder Theil 2310 □′ erhalten, und man schneidet daher vom Ganzen ein Viertel nach dem andern ab und berichtigt wieder dessen Inhalt, wie im Vorigen.

Zus. Hieraus erhellet, daß, wenn dieselbe Figur in mehrere ungleiche Theile zerlegt werden sollte, man eben so verfahren müßte; es sey denn, daß noch besondere Rücksichten auf die Linien oder Lage der Theile genommen würden.

165. Man soll eine gegebene Figur copiren.

Hierzu bedient man sich unter andern eines dreifüßigen Zirkels. Da dieser nämlich immer drei Puncte greift, welche man sich als die Grenzen

eines jeden Dreiecks denken kann, so lassen sich dadurch Winkel von jeder Beschaffenheit von einem Papiere aufs andere tragen, ohne daß man nöthig hätte, dieselben jedesmal durch einen Transporteur zu messen. Auf solche Art lassen sich nicht nur geradlinige, sondern auch krummlinige Figuren, wenn man dieselben zuvor so viel möglich auf geradlinige reducirt hat, copiren.

Eine andere Methode besteht darin, daß man vermittelst einer Nadel, die daher auch Copiernadel heißt, die Hauptpuncte einer Figur so durchsticht, daß sie sich auf einem untergelegten Papiere wieder darstellen und folglich nur durch gerade Linien mit einander verbunden werden müssen. Dieß Verfahren ist einfach, leicht und zugleich sicher, wenn es mit der nöthigen Vorsicht geschieht, und kein Theil während der Arbeit verrückt wird. Man könnte sich hierzu zwar einer jeden Nadel bedienen, aber eine so viel möglich feine wird auch weniger starke Löcher machen, welche man nachher wieder durch ein Falzbein auf der entgegengesetzten Seite des Papiers so wegstreichen kann, daß die Spur davon verschwindet.

166. Man soll den Flächeninhalt einer gegebenen Figur bestimmen.

Da, nach dem Entwerfen oder Copiren einer gegebenen Fläche, diese Arbeit zuletzt vorkömmt, so wird derselben hier nur noch mit wenigen Worten erwähnt, weil das Hauptsächlichste davon schon frü-

her abgehandelt wurde. Gewöhnlich ist eine solche Figur bereits durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, bei deren Ausrechnung man verfährt, wie oben (131) ist gelehrt worden. Um aber die Arbeit abzukürzen, thut man wohl, wenn man die Seite, welche zweien aneinanderstoßenden Dreiecken gemein ist, als ihre gemeinschaftliche Grundlinie betrachtet, und auf diese die Perpendikel errichtet, welche ihre Höhen vorstellen. Die Summe aller Dreiecke einer solchen Figur gibt den Flächeninhalt des Ganzen.

Eben so wird die Ausrechnung erleichtert, wenn man in der Figur viele rechtwinklige Dreiecke bekömmt, weil deren eine Seite schon die Höhe oder Grundlinie darstellt.

Zus. Von vorzüglichem Nutzen ist auch hierbei das Paralleltrapez (13), dessen Inhalt man findet, wenn das Maaß der beiden Parallel-Seiten addirt und mit dem halben Maaße ihres gegenseitigen Abstandes multiplicirt wird. Soll nun der Inhalt einer vielseitigen, gerad- krumm- oder gemischtlinigen Figur berechnet werden, so ziehe man nach ihrer größten Länge eine gerade Linie mitten durch dieselbe, sehe sie als Abscissenlinie an, auf welche man aus den Winkelpuncten des geradlinigen, oder aus schicklich gewählten Puncten des krummlinigen

Umfangs Lothe (Ordinaten) zieht. Hierdurch wird die gegebene Figur in viele Parallel-trapeze und in einige Dreiecke getheilt, welche einzeln berechnet und addirt werden. — Es ist sehr dienlich, daß dieser Fall durch Zeichnungen erläutert und durch wirkliche Berechnung vermittelst des verjüngten Maaßstabes wohl eingeübt werde.

Die rechnende Dreieckslehre.

167. Aus dem Obigen (47) ist bekannt, daß die Natur eines Dreiecks bestimmt sey

a) durch zwei Seiten und den dazwischen liegenden Winkel,

b) durch eine Seite und die zwei anliegenden Winkel,

c) durch die drei Seiten,

d) durch zwei Winkel und eine Seite, welche einem derselben gegenüber liegt.

Soll nun aus diesen gegebenen Stücken das Dreieck gebildet werden, um die noch übrigen Stücke zu bestimmen, so muß dieses durch wirkliches Zeichnen und Messen geschehen. Das Zeichnen aber sowohl, als das Messen, ist mit größern oder kleinern Unrichtigkeiten verknüpft. Wenn es daher eine Methode gibt, die fehlenden Stücke des Dreiecks durch eine zuverlässige Rechnung zu bestimmen, so muß diese, durch größere Genauigkeit, bedeutende Vorzüge haben. Diese Methode, aus den zur Bestimmung eines Dreiecks nöthigen und in Zahlen angegebenen Stücken, die übrigen durch Rechnung zu finden, heißt die rechnende Dreieckslehre oder die Trigonometrie.

168. Es sey (Fig. 75) aus c mit ca ein Kreis beschrieben und ab dessen Durchmesser, so ist aus

dem Vorhergehenden bekannt, daß ∢ d und ∢ f, welche mit ihren Schenkeln auf dem Halbkreise stehen, rechte Winkel sind. Da nun der Durchmesser die größte Sehne im Kreise ist, so könnte man sagen, die zu dem rechten Winkel im Kreise gehörige Sehne sey der Durchmesser dieses Kreises.

Nimmt man ag zur Sehne, so theilt dieselbe die Peripherie des Kreises in zwei ungleiche Stücke ang und amb g. Werden von den willkührlichen Puncten m und n die Verbindungslinien ma, mg und na, ng gezogen, so entstehen die Winkel m und n, deren jener ein spitzer, dieser ein stumpfer ist, und zusammengenommen zwei rechte Winkel betragen.

Gleichwie der Durchmesser ab dem rechten ∢ d oder f als Sehne angehörte, so läßt sich nun sagen, daß die Linie ag als Sehne sowohl den ∢ m, als auch dem ∢ n zugehöre.

169. Es ist einleuchtend, daß, wenn die Sehne ag größer wird, der ∢ m wachsen, der ∢ n aber um eben so viel abnehmen müsse. Umgekehrt muß, wenn ag kleiner wird, der ∢ m vermindert, der ∢ n aber um eben soviel vermehrt werden. Hieraus folgt, daß die Sehne ag in einem solchen Verhältnisse gegen die ∢ m und n stehe, wodurch man sagen kann, sie sey sowohl dem ∢ m, als auch dem ∢ n zugehörig. Es ist demnach klar, daß jedem Peripherie-Winkel im Kreise eine bestimmte

Linie als Sehne angehöre, und zwar nach folgendem Gesetze:

a) dem rechten Winkel im Kreise gehört der Durchmesser, oder die größte Sehne zu;

b) jedem spitzen Peripherie-Winkel, gehört als Sehne eine kleinere Linie als der Durchmesser zu. Eben dieses gilt auch für jeden stumpfen Peripherie-Winkel;

c) wenn ein stumpfer und ein spitzer Peripherie-Winkel zusammengenommen zwei rechte betragen, so gehört ihnen die nämliche Linie (kleiner als der Durchmesser) als Sehne zu.

170. Da man um jedes Dreieck einen Kreis beschreiben kann, so sey (Fig. 76) aus c um das Dreieck abd ein Kreis beschrieben, wodurch die ∢ a, b, d Peripherie-Winkel werden. Nach dem Vorhergehenden läßt sich nun sagen, daß die Linie bd als Sehne dem ∢ a, die Linie ad als Sehne dem ∢ b und die Linie ab als Sehne dem ∢ d angehöre. Es kann nämlich kein Winkel dieses Dreiecks verändert werden, ohne daß die ihm gegenüber liegende Seite, als seine Sehne, ebenfalls verändert werde.

171. Da auf diese Weise die Sehnen mit den ihnen zugehörigen Winkeln wachsen und abnehmen, oder abnehmen und wachsen, so erregte dieses den glücklichen Gedanken, diese Sehnen als Maas der ihnen zugehörigen Winkel zu gebrauchen. Der Durch-

messer des Kreises, als die größte Sehne in demselben, bietet die bequemste Einheit dar, und es kömmt nur darauf an, für alle stumpfe und spitze Winkel, welche, zusammen genommen, 180° betragen, die ihnen zukommenden kleinern Sehnen zu berechnen. Denn jeder bestimmte Theil des Durchmessers gehört als Sehne zwei bestimmten Winkeln zu, deren Summe = 180°. Dies gibt eine neue Methode, das Maas der Winkel nicht durch Grade (krumme Linien), sondern durch gerade Linien zu bestimmen. Die Frage: wie können diese Sehnen für jeden Winkel berechnet werden? ist nicht so einfach zu beantworten, als daß sie den ersten Anfängern (welchen gegenwärtige Schrift gewidmet ist) deutlich gemacht werden könnte. Daher müssen sie sich vorerst mit den Resultaten jener Rechnungen begnügen, zu deren gründlicher Einsicht sie eben hierdurch für die Folge ermuntert werden sollen.

172. Aus diesen Berechnungen entstand die nachfolgende Sehnen-Tafel, d. h. eine Sammlung von Winkeln und den dazu gehörigen Sehnen für einen bestimmten Durchmesser. Dieser Durchmesser wurde hier in 100,000 gleiche Theilchen getheilt angenommen, und nach diesen Theilchen sind die Sehnen aller Winkel von Viertels- zu Viertels-Graden berechnet worden. Den Gebrauch dieser Tafel werden sogleich mehrere Beispiele lehren.

Sehnen-Tafel
für
jeden Viertelsgrad von 15′ bis 90°.

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
15′	436	15′	10887
30′	873	30′	11320
45′	1309	45′	11754
1° —	1745	7° —	12187
15′	2181	15′	12620
30′	2618	30′	13035
45′	3054	45′	13485
2° —	3490	8° —	13917
15′	3926	15′	14349
30′	4362	30′	14781
45′	4798	45′	15212
3° —	5234	9° —	15643
15′	5669	15′	16074
30′	6105	30′	16505
45′	6540	45′	16935
4° —	6976	10° —	17365
15′	7411	15′	17794
30′	7846	30′	18223
45′	8281	45′	18632
5° —	8716	11° —	19081
15′	9150	15′	19509
30′	9585	30′	19937
45′	10019	45′	20364
6° —	10453	12° —	20791

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
15′	21218	19° —	32557
30′	21644	15′	32969
45′	22070	30′	33381
13° —	22495	45′	33792
15′	22920	20° —	34202
30′	23344	15′	34612
45′	23769	30′	35021
14° —	24192	45′	35429
15′	24615	21° —	35837
30′	25038	15′	36244
45′	25460	30′	36650
15° —	25882	45′	37056
15′	26303	22° —	37461
30′	26724	15′	37865
45′	27144	30′	38268
16° —	27564	45′	38671
15′	27983	23° —	39073
30′	28401	15′	39474
45′	28820	30′	39875
17° —	29237	45′	40275
15′	29654	24° —	40674
30′	30071	15′	41072
45′	30486	30′	41469
18° —	30902	45′	41866
15′	31316	25° —	42262
30′	31730	15′	42657
45′	32144	30′	43051

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
45′	43444	30′	53730
26° —	43837	45′	54097
15′	44229	33° —	54464
30′	44620	15′	54829
45′	45010	30′	55194
27° —	45399	45′	55557
15′	45787	34° —	55919
30′	46175	15′	56280
45′	46561	30′	56641
28° —	46947	45′	57000
15′	47332	35° —	57358
30′	47716	15′	57715
45′	48099	30′	58070
29° —	48481	45′	58425
15′	48862	36° —	58779
30′	49242	15′	59131
45′	49622	30′	59482
30° —	50000	45′	59832
15′	50377	37° —	60181
30′	50754	15′	60529
45′	51129	30′	60876
31° —	51504	45′	61222
15′	51877	38° —	61566
30′	52250	15′	61909
45′	52621	30′	62251
32° —	52992	45′	62592
15′	53361	39° —	62932

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
15′	63271	46° —	71934
30′	63608	15′	72236
45′	63944	30′	72537
40° —	64279	45′	72837
15′	64612	47° —	73135
30′	64945	15′	73432
45′	65276	30′	73728
41° —	65606	45′	74022
15′	65935	48° —	74314
30′	66262	15′	74606
45′	66588	30′	74896
42° —	66913	45′	75184
15′	67237	49° —	75471
30′	67559	15′	75756
45′	67880	30′	76041
43° —	68200	45′	76323
15′	68518	50° —	76604
30′	68835	15′	76884
45′	69151	30′	77162
44° —	69466	45′	77439
15′	69779	51° —	77715
30′	70091	15′	77988
45′	70401	30′	78261
45° —	70711	45′	78532
15′	71019	52° —	78801
30′	71325	15′	79069
45′	71630	30′	79335

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
45′	79600	30′	86163
53° —	79864	45′	86384
15′	80125	60° —	86603
30′	80386	15′	86820
45′	80644	30′	87036
54° —	80902	45′	87250
15′	81157	61° —	87462
30′	81412	15′	87673
45′	81664	30′	87882
55° —	81915	45′	88089
15′	82165	62° —	88295
30′	82413	15′	88499
45′	82659	30′	88701
56° —	82904	45′	88902
15′	83147	63° —	89101
30′	83389	15′	89298
45′	83629	30′	89493
57° —	83867	45′	89687
15′	84104	64° —	89879
30′	84339	15′	90070
45′	84573	30′	90259
58° —	84805	45′	90446
15′	85035	65° —	90631
30′	85264	15′	90814
45′	85491	30′	90969
59° —	85717	45′	91176
15′	85941	66° —	91355

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
15′	91531	73° —	95630
30′	91706	15′	95757
45′	91879	30′	95882
67° —	92050	45′	96005
15′	92220	74° —	96126
30′	92388	15′	96246
45′	92554	30′	96363
68° —	92718	45′	96479
15′	92881	75° —	96593
30′	93042	15′	96705
45′	93201	30′	96815
69° —	93358	45′	96923
15′	93514	76° —	97030
30′	93667	15′	97134
45′	93819	30′	97237
70° —	93969	45′	97338
15′	94118	77° —	97437
30′	94264	15′	97534
45′	94409	30′	97630
71° —	94552	45′	97723
15′	94693	78° —	97815
30′	94832	15′	97905
45′	94970	30′	97992
72° —	95106	45′	98079
15′	95240	79° —	98163
30′	95372	15′	98245
45′	95502	30′	98325

Winkel.	Sehne.	Winkel.	Sehne.
45′	98404	85° —	99619
80° —	98481	15′	99657
15′	98556	30′	99692
30′	98629	45′	99725
45′	98700	86° —	99756
81° —	98769	15′	99786
15′	98836	30′	99813
30′	98902	45′	99839
45′	98965	87° —	99863
82° —	99027	15′	99885
15′	99087	30′	99905
30′	99144	45′	99923
45′	99200	88° —	99939
83° —	99255	15′	99953
15′	99307	30′	99966
30′	99357	45′	99976
45′	99406	89° —	99985
84° —	99452	15′	99991
15′	99497	30′	99996
30′	99540	45′	99999
45′	99580	90° —	100000

173. Um von dieser Tafel praktische Anwendung zu machen, müssen noch einige Hülfssätze erörtert werden. Der **erste** ist dieser:

> **Die Sehnen gleicher Winkel, in Kreisen von verschiedenen Durchmessern, stehen im geraden Verhältnisse dieser Durchmesser.**

Es seyen mit den Durchmessern ca und cm (Figur 77) zwei Kreise beschrieben, in c befinde sich der Mittelpunktswinkel mcn und man habe die Sehnen ab und mn gezogen. Nimmt man nun in dem Umfange des größern Kreises den willkührlichen Punct h, in jenem des kleinern aber den beliebigen Punct g und zieht die geraden Linien hm, hn, und ga, gb, so sind die Peripheriewinkel h und g einander gleich, die zu h gehörige Sehne ist mn, die zu g gehörige ist ab, und es ist zu zeigen, daß sich diese Sehnen wie die Durchmesser der Kreise verhalten, wozu sie gehören. Dieses folgt nun daraus. Da $ca:cb = cm:cn$, so ist ab parallel mit mn, folglich $\triangle\, acb \sim \triangle\, mcn$; daher $mn:ab = mc:ac$, d. h. die Sehnen mn und ab stehen im geraden Verhältnisse der **Halbmesser**, folglich auch der **Durchmesser** der aus c beschriebenen Kreise.

Hieraus folgt nun **zweitens**, daß das Verhältniß vom Durchmesser eines Kreises zu jener Sehne, welche in demselben einem bestimmten Winkel angehört, ein **fest bestimmtes** und **unverän**-

derliches sey, obschon der nämliche Winkel bald durch größere, bald durch kleinere Sehnen bestimmt werden kann. Bei der Winkelmessung durch Grade tritt eben dieses ein, und die Größe eines Bogens von 10° etwa kann, nach Verhältniß des Halbmessers, bald sehr klein, bald aber von bedeutender Größe seyn.

174. Auch ist nunmehr leicht einzusehen, daß sich in jedem Dreiecke die Seiten wie die Sehnen der diesen Seiten entgegenstehenden Winkel verhalten. Es sey abd (Fig. 76) dieses Dreieck, und aus c um dasselbe ein Kreis beschrieben, so ist klar, daß ab sowohl als Dreiecksseite, als auch als Sehne vom Winkel d betrachtet werden kann. Diese doppelte Bedeutung hat auch die Seite ad und bd. Daher springt die Wahrheit obiger Behauptung sogleich in die Augen.

175. Wenn man aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die fehlenden durch Rechnung finden soll, so muß wenigstens eine Seite darunter seyn. Denn wenn keine Seite gegeben wäre, so müßten es die Winkel seyn; die Winkel eines Dreiecks bestimmen aber nicht seine Größe, sondern seine Gestalt, und es ist einleuchtend, wie man Dreiecke von gleichen Winkeln, die höchst verschieden an Größe sind, bilden könne.

176. Auf diesen Vordersätzen beruht nun die wirkliche Berechnung der fehlenden Stücke jener

Dreiecke, deren bestimmende Elemente gegeben sind. Zuerst sollen hier die rechtwinkeligen, dann die gleichschenkeligen, endlich die Dreiecke überhaupt betrachtet werden.

A) Von rechtwinkeligen Dreiecken.

177. Die möglichen Fälle zu bestimmen, welche bei der Berechnung der fehlenden Stücke im rechtwinkeligen Dreiecke Statt finden können.

Da in dem rechtwinkeligen Dreiecke der rechte Winkel immer gegeben ist, so findet man für das Dreieck ABC (Fig. 78.) folgende vier Fälle:

I. Fall.

Gegeben: AC und ∠ A; oder AC und ∠ C.
Gesucht: ∠ C, AB und BC; oder ∠ A, AB und BC.

II. Fall.

Gegeben: AB und ∠ A, oder ∠ C; oder BC und ∠ C oder ∠ A.
Gesucht: BC, AC und ∠ C, oder ∠ A; oder AB, AC und ∠ A, oder ∠ C.

III. Fall.

Gegeben: AC und AB; oder AC und BC.
Gesucht: ∠ C, ∠ A und BC; oder ∠ A ∠ C und AB.

IV. Fall.

Gegeben: AB und BC.

Gesucht: AC, ∢ A und ∢ B.

Diese vier Fälle sollen nun einzeln durchgeführt und, zur größern Uebung der Anfänger, mit Zahlenbeispielen erläutert werden; wobei es sich von selbst versteht, daß man alle Linien hier arithmetisch, d. h. nach ihrem Zahlenwerthe betrachtet.

178. Aus der Hypotenuse und einem daran liegenden spitzen Winkel den andern spitzen Winkel und die beiden Catheten zu finden.

I. Wenn AC und ∢ A gegeben wird, so ist:

1) ∢ C = 90° — ∢ A.

2) Sehne ∢ B : Sehne ∢ A = AC : BC,

folglich $BC = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle A \times AC}{\text{Sehne} \sphericalangle B}$,

3) Sehne ∢ A: Sehne ∢ C = BC : AB,

folglich $AB = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle C \times BC}{\text{Sehne} \sphericalangle A}$,

4) Auch hätte man AB durch folgende Proportion:

Sehne ∢ B : Sehne ∢ C = AC : AB

finden können, wodurch

$$AB = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle C \times AC}{\text{Sehne} \sphericalangle B} \text{ wird.}$$

5) Ferner hätte die Größe von AB durch den Ausdruck $AB = \sqrt{(AC^2 - BC^2)}$ gefunden werden können.

II. Wäre aber AC und $\sphericalangle$ C gegeben, so ist:

1) $\sphericalangle A = 90° - \sphericalangle C$,

2) Sehne $\sphericalangle$ B : Sehne $\sphericalangle$ C = AC : AB,

folglich $AB = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle C \times AC}{\text{Sehne} \sphericalangle B}$,

3) Sehne $\sphericalangle$ C : Sehne $\sphericalangle$ A = AB : BC,

folglich $BC = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle A \times AB}{\text{Sehne} \sphericalangle C}$.

4) Diese BC kann auch hier (so wie in I.) noch auf doppelte Weise gefunden werden.

Beispiele. Zu I. Es sey AC = 148′, und $\sphericalangle$ A = 30° 15′, so ist:

1) $\sphericalangle C = 90° - 30° 15' = 59° 45'$.

2) Sehne $\sphericalangle$ 90° : Sehne $\sphericalangle$ 30° 15′ = 148 : BC,

folglich $BC = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle 30° 15' \times 148'}{\text{Sehne} \sphericalangle 90°} =$

$\frac{50377 \times 148}{100000} = \frac{7455796}{100000} = 74' 5'' 5'''$.

3) Sehne $\sphericalangle$ 30° 15′ : Sehne $\sphericalangle$ 59° 45′ = 74′ 5″ : AB; folglich

$AB = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle 59° 45' \times 74' 5''}{\text{Sehne} \sphericalangle 30° 15'} =$

$\frac{86384 \times 74' 5''}{50377} = \frac{64356080}{50377} = 127' 7''$.

Zu II. Es sey AC = 612′ und $\sphericalangle$ C = 46° 30′, so ist:

1) $\sphericalangle A = 90° - 46° 30' = 43° 30'$.

2) $\text{Sehne} \sphericalangle 90^\circ : \text{Sehne} \sphericalangle 46^\circ 30' = 612' : AB$,

$$\text{folglich } AB = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle 46^\circ 30' \times 612'}{\text{Sehne} \sphericalangle 90^\circ.} = \frac{72537 \times 612}{100000} = \frac{44392644}{100000} = 443'\, 9''.$$

3) $\text{Sehne} \sphericalangle 46^\circ 30' : \text{Sehne} \sphericalangle 43^\circ 30' = 443'\, 9'' : BC$, folglich $BC =$

$$\frac{\text{S.} \sphericalangle 43^\circ 30' \times 443' 9''}{\text{Sehne} \sphericalangle 46^\circ 30'} = \frac{68835 \times 4439}{72537} = \frac{305558565}{72537} = 421'\, 2''.$$

4) Die übrigen Berechnungsweisen von AB in I, und von BC in II, werden der Privatübung der Schüler empfohlen.

179. Aus einer Cathete und einem gegebenen spitzen Winkel den andern spitzen Winkel, die andere Cathete und die Hypotenuse zu finden.

I. Wenn AB und $\sphericalangle A$ oder $\sphericalangle C$ gegeben wird, so ist:

1) $\sphericalangle C = 90^\circ - \sphericalangle A$, oder $\sphericalangle A = 90^\circ - \sphericalangle C$.

2) $\text{Sehne} \sphericalangle C : \text{Sehne} \sphericalangle A = AB : BC$,

$$\text{folglich } BC = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle A \times AB}{\text{Sehne} \sphericalangle C},$$

3) $\text{Sehne} \sphericalangle C : \text{Sehne} \sphericalangle B = AB : AC$,

$$\text{folglich } AC = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle B \times AB}{\text{Sehne} \sphericalangle C}.$$

II. Wird aber BC und $\sphericalangle$ C oder $\sphericalangle$ A gegeben, so ist:

1) $\sphericalangle A = 90^\circ - \sphericalangle C$, oder $\sphericalangle C = 90^\circ - \sphericalangle A$,

2) Sehne $\sphericalangle$ A : Sehne $\sphericalangle$ C = BC : AB, folglich $AB = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle C \times BC}{\text{Sehne} \sphericalangle A}$,

3) Sehne $\sphericalangle$ A : Sehne $\sphericalangle$ B = BC : AC, folglich $AC = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle B \times BC}{\text{Sehne} \sphericalangle A}$.

Beispiele. Zu I. Es sey AB = 86′ und $\sphericalangle A = 38^\circ\, 45'$, so ist

1) $\sphericalangle C = 90^\circ - 38^\circ\, 45' = 51^\circ\, 15'$,

2) Sehne $\sphericalangle$ 51° 15′ : Sehne $\sphericalangle$ 38° 45′ = 86 : BC, folglich BC = $\frac{\text{Sehne} \sphericalangle 38^\circ 45' \times 86'}{\text{Sehne} \sphericalangle 51^\circ 15'} = \frac{86' \times 62592}{79988} = \frac{5382912}{79988} = 69'\, 0''\, 0'''$,

3) Sehne $\sphericalangle$ 51° 15′ : Sehne $\sphericalangle$ 90° = 86′ : AC, folglich $AC = \frac{\text{Sehne} \sphericalangle 90^\circ \times 86}{\text{Sehne} \sphericalangle 51^\circ 15'} = \frac{100000 \times 86}{77988} = \frac{8600000}{77988} = 11'\, 0''\, 2'''$.

Zu II. Es sey BC = 344′ und $\sphericalangle C = 30^\circ\, 15'$, so ist:

1) $\sphericalangle A = 90^\circ - 30^\circ\, 15' = 59^\circ\, 45'$,

2) Sehne ∢ 59° 45′ : Sehne ∢ 30° 15′ = 344′ : AB, folglich $AB = \frac{S. ∢ 30° 15′ \times 344′}{Sehne ∢ 59° 45′} =$

$\frac{50377 \times 344′}{86384} = \frac{17329688}{86384} = 20′\ 0″\ 6‴,$

3) Sehne ∢ 59° 45 : Sehne ∢ 90° = 344′ : AC, folglich $AC = \frac{Sehne ∢ 90° \times 344′}{Sehne ∢ 59° 45′} =$

$\frac{100000 \times 344′}{86384} = \frac{34400000}{86384} = 398′\ 2″.$

180. Aus der gegebenen Hypotenuse und einer Cathete die spitzen Winkel und die andere Cathete zu finden.

I. Es sey AC und AB gegeben, so ist:

1) AC : AB = Sehne ∢ 90° : Sehne ∢ C, folglich Sehne $∢ C = \frac{AB \times Sehne ∢ 90°}{AC}$,

2) ∢ A = 90° − ∢ C.

3) Sehne ∢ B : Sehne ∢ A = AC : BC, folglich $BC = \frac{Sehne ∢ A \times AC}{Sehne ∢ B}$.

II. Wenn aber AC und CB gegeben sind, so ist:

1) AC : CB = Sehne ∢ 90° : Sehne ∢ A, folglich Sehne $∢ A = \frac{CB \times Sehne ∢ 90°}{AC}$,

2) ∢ C = 90° − ∢ A,

3) Sehne ∢ B : Sehne ∢ C = AC : AB, folglich $AB = \frac{Sehne ∢ C \times AC}{Sehne ∢ B}$.

Beispiele. Zu I. Es sey AC = 64′ und AB = 40′, so ist

1) 64′ : 40′ = Sehne ∢ 90° : Sehne ∢ C,

folglich Sehne ∢ C = $\frac{40' \times S. ∢ 90°}{64'}$ =

$\frac{40' \times 100000}{64'} = \frac{400000}{64} = 62500.$

Da nun diese Sehne zunächst zu dem Winkel von 38° 45′ gehört, so ist ∢ C = 38° 45′,

2) ∢ A = 90° − ∢ C = 90° − 38° 45 = 51° 15′,

3) Sehne ∢ 90° : Sehne ∢ 51° 15′ = 64′ : BC,

folglich CB = $\frac{\text{Sehne } ∢ 51° 15 \times 64'}{\text{Sehne } ∢ 90°}$ =

$\frac{77988 \times 64'}{100000} = \frac{4991232}{100008} = 46°\ 9'\ 1''.$

Zu II. Es sey AC = 322′ und CB = 264′, so ist

1) 322′ : 264 = Sehne ∢ 90° : Sehne ∢ A,

folglich Sehne ∢ A = $\frac{264' \times S. ∢ 90°}{322'}$ =

$\frac{264' \times 100000}{322'} = \frac{26400000}{322} = 81987,$

wozu ein Winkel von 55° gehört,

2) ∢ C = 90° − ∢ A = 90° − 55° = 35°,

3) Sehne ∢ 90° : Sehne ∢ 35° = 322 : AB,

folglich AB = $\frac{\text{Sehne } ∢ 35° \times 322'}{\text{Sehne } ∢ 90°}$ =

$\frac{57358 \times 322}{100000} = \frac{18469276}{100000} = 184'\ 6''\ 9'''.$

181. Aus den beiden Catheten die Hypotenuse und die spitzen Winkel zu finden.

Wenn AB und BC gegeben sind, so findet man

1) AC dadurch, daß man das Maaß von AB und das Maaß von BC zum Quadrate erhebt und aus ihrer Summe die Quadratwurzel zieht,

2) AC : BC = Sehne ∡B : Sehne ∡A,

folglich $\text{Sehne } \sphericalangle A = \frac{BC \times \text{Sehne } \sphericalangle B}{AC}$,

3) $\sphericalangle C = 90° - \sphericalangle A$.

Beispiel. Es sey AB = 24′ und BC = 16′, so ist:

1) $AC = \sqrt{(24^2 + 16^2)} = \sqrt{(576 + 256)} = \sqrt{832} = 28' \, 8''$,

2) 28′ 8″ : 16 = Sehne ∡90° : Sehne ∡A,

folglich $\text{Sehne } \sphericalangle A = \frac{160'' \times 100000}{288''} = \frac{1600000}{288} = 55555$, welche einem Winkel von 33° 45′ zugehört.

3) $\sphericalangle C = 90° - 33° \, 45' = 56° \, 15'$.

Anmerkung. Da man aus irgend zwei gegebenen Seiten im rechtwinkeligen Dreiecke die dritte Seite, vermöge des pythagorischen Lehrsatzes, durch Rechnung finden kann, so können in den vorhergehenden Aufgaben einige dieser Linien auch auf solche Weise berechnet werden. Es ist Anfängern zu rathen, beide Rechnungen

zu führen, wodurch zugleich eine der andern zur Probe dient.

B) Von gleichschenkeligen Dreiecken.

182. Die Fälle zu bestimmen, welche Statt finden können, wenn man im gleichschenkeligen Dreiecke aus den gegebenen Stücken die übrigen berechnen soll.

Da unter den gegebenen Stücken wenigstens eine Seite seyn muß, und in dem gleichschenkeligen Dreiecke aus einem gegebenen Winkel die zwei andern leicht gefunden werden können, so sind nur folgende drei Fälle möglich:

I. Aus der Grundlinie und einem der gleichen Schenkel die Winkel zu finden.

II. Aus der Grundlinie und den Winkeln die gleichen Schenkel zu finden.

III. Aus den gleichen Schenkeln und den Winkeln die Grundlinie zu finden.

Es sey BAC (Fig. 79.) das gegebene Dreieck, worin BA = AC, so entstehen folgende drei Fälle:

I. Fall.

Gegeben: AB = AC und BC;
Gesucht: ∢ BAC, und ∢ B = ∢ C.

II. Fall.

Gegeben: AB = AC, und ∢ BAC, oder
AB = AC, und ∢ B = ∢ C;
Gesucht: BC und ∢ B = ∢ C, oder BC und
∢ BAC.

III. Fall.

Gegeben: BC und ∡ BAC, oder BC und ∡ B = ∡ C;

Gesucht: AB = AC und ∡ B = ∡ C, oder AB = AC und ∡ BAC.

183. **Die Fälle, welche bei dem gleichschenkeligen Dreiecke eintreten können, aufzulösen.**

Wenn man von der Spitze A ein Loth AD auf die Grundlinie BC zieht, so ist bekannt, daß sowohl letztere, als auch der Winkel an der Spitze, in zwei gleiche Theile getheilt wird. Auch entstehen in dem gleichschenkeligen Dreiecke die rechtwinkeligen congruenten Dreiecke ADB und ADC. Hieraus ergibt sich Folgendes:

Für den I. Fall.

Da BC gegeben ist, so ist auch BD = DC bekannt, und durch die Proportion AB : BD = Sehne ∡ 90° : Sehne ∡ BAD wird aus den bekannten drei ersten Gliedern der ∡ BAD gefunden. Dieser verdoppelt, ist der ∡ BAC, und letzterer von 180° abgezogen, gibt zum Reste die Summe der gleichen Winkel B und C, deren Hälfte also = ∡ B = ∡ C ist.

Für den II. Fall.

Wenn AB = AC und ∡ BAC bekannt ist, so halbire man diesen Winkel, um ∡ BAD = ∡ CAD zu finden. Schließt man nun:

Sehne ∡ 90° : Sehne ∡ BAD = AB : BD,

so wird hieraus BD gefunden, welches, doppelt genommen, die zu findende Grundlinie BC gibt.

Wäre AB und $\angle B = \angle C$ gegeben, so subtrahire man $\angle B$ von $90°$, um $\angle BAD$ zu finden, und verfahre nun wie vorhin.

Für den III. Fall.

Es sey BC und $\angle BAC$ bekannt, so halbire man Beides, um BD und $\angle BAD$ zu finden. Setzt man nun die Proportion:

Sehne $\angle BAD$: Sehne $\angle 90° = BD : AB$,

so wird AB als viertes Glied gefunden.

Wäre BC und $\angle B = \angle C$ gegeben, so ziehe man $\angle B$ von $90°$ ab, um $\angle BAD$ zu erhalten, und verfahre nun wie vorhin.

Anmerkung. Es ist nöthig, daß der Schüler zu allen diesen Fällen mehrere Beispiele berechne, welche hier, um nicht zu weitläufig zu werden, übergangen worden sind. Auch sieht man leicht, wie in dem gleichschenkeligen Dreiecke, aus den vorhin gegebenen Stücken, dessen Höhe und durch diese auch sein Inhalt berechnet werden kann. Diese Uebung ist den Anfängern sehr zu empfehlen.

C) Von Dreiecken überhaupt.

184. Die Fälle zu entwickeln, welche bei dem Dreiecke überhaupt möglich sind, um aus den gegebenen Stücken die fehlenden zu berechnen.

Da wenigstens eine Seite gegeben seyn muß, und bei zwei gegebenen Winkeln des Dreiecks der dritte auch leicht bekannt ist, so entstehen folgende vier Fälle:

I. Aus einer Seite und den zwei Winkeln;

II. Aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher der einen Seite gegenüberliegt;

III. Aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel;

IV. Aus allen drei Seiten die fehlenden Stücke zu finden.

Diese vier Aufgaben sollen nun, der Ordnung nach, allgemein aufgelöst werden.

185. Aus einer Seite und zwei Winkeln die fehlenden Stücke in dem Dreiecke zu finden.

Es sey (Fig. 80) DEF das Dreieck, worin, außer EF, noch zwei Winkel gegeben sind. Man soll das Uebrige finden.

I. Da zwei Winkel gegeben sind, so wird der dritte gefunden, wenn man die Summe der gegebenen von 180° abzieht;

II. Um ED zu finden, schließe man: Sehne $\measuredangle$ D : Sehne $\measuredangle$ F = EF : ED, woraus ED $= \frac{\text{Sehne } \measuredangle F \times EF}{\text{Sehne } \measuredangle D}$ wird;

III. Desgleichen wird durch: Sehne $\measuredangle$ D : Sehne $\measuredangle$ E = EF : FD die Seite FD gefunden, und $FD = \frac{\text{Sehne } \measuredangle E \times EF}{\text{Sehne } \measuredangle D}$.

186. Aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher der einen Seite gegenübersteht, die fehlenden Stücke im Dreiecke zu finden.

Es sey (Fig. 80.) DE, EF und $\measuredangle$ D, oder DE, EF und $\measuredangle$ F gegeben. Man sucht $\measuredangle$ F, $\measuredangle$ E und DF, oder $\measuredangle$ D, $\measuredangle$ E und DF.

I. Aus EF : ED = Sehne ∢ D : Sehne ∢ F, wird Sehne ∢ F = $\frac{\text{ED} \times \text{Sehne} ∢ \text{D}}{\text{EF}}$.

II. ∢ E = 180° − (∢ D + ∢ F).

III. Auf ähnliche Weise wird aus DE, EF und ∢ F das noch Fehlende gefunden.

187. **Aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke des Dreiecks durch Rechnung zu finden.**

Es sey DEF (Fig. 80.) das gegebene Dreieck, worin man aus DE, EF und ∢ E die übrigen Stücke berechnen soll.

I. Entweder ist der ∢ E ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer Winkel. Der II. Fall ist oben bei den rechtwinkeligen Dreiecken aufgelöst worden.

Ist aber ∢ E (Fig. 80.) ein spitzer, so theilt das Loth DG das Dreieck EDF in zwei rechtwinkelige Dreiecke DGE und DGF. In jenem kann man aus ∢ E den ∢ EDG, und aus diesem und der Hypotenuse ED die Linie EG leicht finden. Diese von EF abgezogen, läßt GF übrig. Da aber auch in dem Dreiecke DGE das Loth DG auf doppelte Weise berechnet werden kann, so sind in dem Dreiecke DGF die zwei Catheten DG und GF bekannt, woraus man sowohl die Linie DF, als auch den ∢ F berechnen kann. Aus den Winkeln E und F findet man sodann noch den ∢ EDF.

III. Wenn endlich ∢ DEF (Fig. 81.) ein stumpfer ist, so fällt das Loth DG auf die über E

verlängerte FE und man kann in dem rechtwinkeligen Dreiecke DGE aus DE und ∢ DEG (der durch seinen Nebenwinkel DEF bekannt ist) sowohl DG als GE berechnen. Wird GE zu EF addirt, so kennt man in dem rechtwinkeligen Dreiecke DGF die Catheten DG und GF, woraus man sowohl den ∢ F als auch DF berechnen kann. Aus ∢ DGF und ∢ F findet man endlich noch ∢ EDF.

188. Aus drei gegebenen Seiten eines Dreiecks die demselben zugehörigen Winkel zu berechnen.

Es sey (Fig. 82.) ABC das gegebene Dreieck und AB, BC und CA die gegebenen Größen. Man soll die ∢ A, B und C finden.

I. Das gegebene Dreieck ist entweder gleichseitig, gleichschenkelig oder ungleichseitig. Im ersten Falle ist jeder Winkel = 60°. Im zweiten werden die Winkel (nach 184) berechnet.

II. Im dritten Falle werde mit der kleinsten Seite AB aus A der Kreis FBDEF beschrieben und CA bis F verlängert, auch FB und ED nebst dem Lothe AG gezogen, so ist, da ∢ EDG + ∢ EDB = 180° = ∢ EDB + ∢ BFE, auch ∢ EDC = ∢ BFE. Folglich sind die Dreiecke EDC und BFC ähnlich und BC : FC = EC : DC.

III. Da nun BC, FC = BA + AC und EC = AC − AB drei bekannte Größen sind, so wird DC durch Rechnung gefunden. Da BC − DC = BD und BG = ½ BD, so ist auch sowohl BG als GC bekannt.

IV. Nun kann man im rechtwinkeligen Dreiecke AGB aus BA und BG den ∢ ABG, und im rechtwinkeligen Dreiecke AGC aus CA und CG den ∢ C leicht finden. Sind aber diese beide Winkel bekannt, so ist es auch der ∢ BAC.

Anmerk. Es wird wiederholt erinnert, daß es durchaus nothwendig ist, alle diese Fälle durch mehrere Beispiele zu erläutern, um den Schüler nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch zu üben.

189. Zum Schlusse sollen von dieser Lehre noch einige Anwendungen auf practische Fälle gemacht werden.

Es sey (Fig. 66) die Entfernung bc, durch Hülfe des Standpunctes a, zu berechnen.

Dies kann auf doppelte Weise geschehen:

I. Indem man die Linien ab und ac, und auch den ∢ bac mißt, und sodann nach (187) die Entfernung bc findet; oder

II. Indem man die Linie ac, nebst den beiden ∢ bac und bca mißt und hieraus (nach 185) die Weite bc berechnet.

Anmerkung. Es ist den Anfängern zu rathen, sich in der wirklichen Berechnung dieser Beispiele zu üben.

190. Sollte man (Fig. 66*) die Entfernung bc oder ba vermittelst der Standlinie ac berechnen, so wird sowohl diese Linie ac, als auch jeder der ihr anliegenden beiden Winkel bac und bca gemessen, woraus denn (nach 185) ab und bc leicht gefunden werden kann. — Einige Beispiele darüber zu berechnen, ist eine sehr nützliche Uebung für Anfänger.

191. Es sey (Fig. 67) die Entfernung ab zu berechnen, unter der Bedingniß, daß man weder nach a, noch nach b messen kann.

Man nehme die Standlinie fg und messe die Winkel o, u, y, a, so wie auch diese Linie selbst. Nun kann aus ∢y, ∢(u + o) und aus fg (nach 185) die Linie af berechnet werden.

Eben so findet man aus ∢u, ∢(y + x) und aus fg die Größe von bf. Endlich wird aus den nunmehr bekannten Linien af, bf und dem bekannten ∢o (nach 187) die Entfernung ab berechnet werden.

192. Die Höhe dc (Fig. 69) aus den beiden Standpuncten a und b zu berechnen.

Man messe ab, den ∢dab und ∢dba, welcher letztere sich durch den gemessenen ∢dbc ergibt, und finde (nach 185) die Größe von db. Nun kann in dem rechtwinkeligen Dreiecke dbc aus db, ∢dbc und ∢c = R (nach 178) sehr leicht die Cathete dc gefunden werden.

Die Berechnung einiger Beispiele wird dem Anfänger sehr nützlich seyn.

193. Man soll die Größe eines auf dem Papier gegebenen Winkels durch Hülfe der Sehnentafel berechnen.

Es sey ABD (Fig. 83) der zu messende Winkel, so ist derselbe entweder spitz oder stumpf.

Im ersten Falle beschreibe man mit einem Halbmesser von bekannter Größe, z. B. mit CB, einen Kreis, welcher durch des Winkels Scheitel B

und durch seine beide Schenkel in E und in F geht, und messe die Größe der Sehne EF in dem nämlichen Maaße. Nun schließe man 2 CB (oder BG) : EF = 100000 : x, so gibt x die dem ∢ ABD zugehörige Sehne nach 100000 Theilchen des Durchmessers, und man darf nur in der Sehnentafel den ihr zunächst kommenden Winkel aufsuchen.

Im zweiten Falle verlängere man einen Schenkel des zu messenden stumpfen Winkels willkührlich, so entsteht sein spitzer Nebenwinkel, dessen Größe nach dem vorigen Falle bestimmt werden kann. Ist aber dieser spitze Winkel in Graden bekannt, so ist es auch sein Nebenwinkel, der mit ihm 180° beträgt.

Beispiele. Zum ersten Falle. Es sey BG = 36′ und EF = 25′, so ist 36 : 25 = 100000 : Sehne ∢ ABD; folglich Sehne ∢ ABD $= \frac{2500000}{36}$ = 69444, welchem Maaße in der Sehnentafel ein Winkel von 44° entspricht.

Zum zweiten Falle. Wäre in Fig. 81. der stumpfe Winkel DEF zu messen, so construire man seinen Nebenwinkel DEG. Wäre dieser nun, nach dem ersten Falle, = 48° gefunden worden, so müßte ∢ DEF = 180° — 48° = 132° seyn.

194. Einen in Graden und Viertelsgraden gegebenen Winkel, vermittelst der Sehnentafel, auf das Papier zu verzeichnen.

Da dieser Winkel sowohl spitz als stumpf seyn kann, so hat eine doppelte Auflösung Statt.

I. Man soll an den Endpunct B (Fig. 83)

der geraden AB einen ∢ ABD = 49° 30′ legen. Hier beschreibe man aus dem willkührlichen Puncte C mit einem beliebigen, jedoch dem Maaße nach bestimmten, Halbmesser CB den Kreis BEGHB, und setze die Proportion:

Sehne ∢ 90 : Sehne ∢ 49° 30′ = 2 BC : x,

so gibt x die Größe von EF in dem Maaße von CB. Wird nun aus E mit dieser EF ein Bogen beschrieben, welcher den Kreis in F schneidet, und die BF gezogen, so ist ABD der verlangte Winkel.

II. Sollte man einen stumpfen Winkel von 112° 30′ construiren, so bilde man (nach I) seinen spitzen Nebenwinkel von 67° 30′, wodurch der stumpfe Winkel sich durch Verlängerung seines Schenkels ergibt.

Beispiele. Zum ersten Falle. Da Sehne 49° 30′ = 76041 ist, so wird, wenn BC = 20′ wäre, die Proportion diese 100000 : 76041 = 40 : x; folglich $x = \frac{76041 \times 40}{100000} = \frac{3041640}{100000} = 30'\ 4'$, = EF.

Zum zweiten Falle. Für den stumpfen Winkel 112° 30′ wird sein Nebenwinkel 67° 30′ und dessen Sehne = 92388, daher ist die Proportion diese: 100000 : 92388 = 40 : x, welches $x = \frac{92388 \times 40}{100000} = \frac{3695520}{100000} = 36'\ 9'' =$ EF gibt, wodurch der Winkel von 67° 30′ und folglich auch jener von 112° 30′ leicht construirt werden kann.

I. Tafel der Quadrat- und Cubikzahlen von 1 bis 100.

Wrz.	Quadrz.	Cubikzahl	Wrz.	Quadrz.	Cubikzahl
1	1	1	31	961	29791
2	4	8	32	1024	32768
3	9	27	33	1089	35937
4	16	64	34	1156	39304
5	25	125	35	1225	42875
6	36	216	36	1296	46656
7	49	343	37	1369	50653
8	64	512	38	1444	54872
9	81	729	39	1521	59319
10	100	1000	40	1600	64000
11	121	1331	41	1681	68921
12	144	1728	42	1764	74088
13	169	2197	43	1849	79507
14	196	2744	44	1936	85184
15	225	3375	45	2025	91125
16	256	4096	46	2116	97336
17	289	4913	47	2209	103823
18	324	5832	48	2304	110592
19	361	6859	49	2401	117649
20	400	8000	50	2500	125000
21	441	9261	51	2601	132651
22	484	10648	52	2704	140608
23	529	12167	53	2809	148877
24	576	13824	54	2916	157464
25	625	15625	55	3025	166375
26	676	17576	56	3136	175616
27	729	19683	57	3249	185193
28	784	21952	58	3364	195112
29	841	24389	59	3481	205379
30	900	27000	60	3600	216000

Wrz.	Quadrz.	Cubikzahl	Wrz.	Quadrz.	Cubikzahl
61	3721	226981	81	6561	531441
62	3844	238328	82	6724	551368
63	3969	250047	83	6889	571787
64	4096	262144	84	7056	592704
65	4225	274625	85	7225	614125
66	4356	287496	86	7396	636056
67	4489	300763	87	7569	658503
68	4624	314432	88	7744	681472
69	4761	328509	89	7921	704969
70	4900	343000	90	8100	729000
71	5041	357911	91	8281	753571
72	5184	373248	92	8464	778688
73	5329	389017	93	8649	804357
74	5476	405224	94	8836	830584
75	5625	421875	95	9025	857375
76	5776	438976	96	9216	884736
77	5929	456533	97	9409	912673
78	6084	474552	98	9604	941192
79	6241	493039	99	9801	970299
80	6400	512000	100	10000	1000000

II. Tafel der Längenmaaße verschiedener Oerter, verglichen mit dem in 144 Linien eingetheilten Pariser Fuß.

	Paris. L.
Anspach, Fuß	132,0
Augsburg, Fuß	131,3
Basel, Fuß	132,2
Berlin, Elle	295,6
— Fuß	137,3
Böhmen, Fuß	131,4
Brabant, Elle	306,5
— Fuß	126,6
Braunschweig, Fuß	126,5
Bremen, Fuß	128,2

	Paris. L.
Breslau, Fuß	126,0
Calenberg, Fuß	129,6
Cracau, Fuß	158,0
Dänemark, Fuß	139,$\frac{1}{8}$
Danzig, Fuß	127,2
Dresden, Fuß	125,3
Frankfurt a. M., Elle	239,2
— Fuß	127,0
Frankfurt a. d. O., Elle	295,6
Frankreich, alte Elle oder Stab . .	520,8
Genf, Fuß	216,3
Gießen, Fuß	132,0
Gotha, Fuß	127,5
Großbrittannien, Elle, Yard von 3 Fuß	405,35
Hamburg, Elle	254,0
— Fuß	127,0
Heidelberg, Fuß	123,5
Kiel, Elle	255,0
Königsberg, Elle	254,8
— Fuß	136,4
Leipzig, Elle	250,6
— Fuß	125,3
Lübeck, Elle	255,8
— Fuß	129,0
Mailand, Elle	260,0
— Fuß	176,0
München, Elle	354,2
— Fuß	128,2
Nürnberg, Elle	292,4
— Werkfuß	134,7
Portugall, Elle	969,0
Rheinländischer Fuß	139,13
Rom, Elle	887,3
— Fuß	990,0
Rußland, Elle	315,4
— Fuß	238,6
Sicilien, Fuß	107,3

	Paris. L.
Spanien, Elle	375,9
— Fuß	125,3
Stuttgard, Elle	271,2
— Fuß	126,8
Turin, Fuß	227,7
Venedig, Elle	282,3
— Fuß	154,0
Warschau, Elle	273,5
Wien, Elle	345,42
— Fuß	140,13
Würtemberg, Fuß	126,8
Zürich, Fuß	132,3

III. Tafel einiger bisher üblichen Flächenmaaße gewisser Gegenden nach Pariser Quadratfuß.

	Pariser Quadr. F.
Amsterdam, Morgen von 600 holl. □ Ruthen	77016
Augsburg, Jauchert von 16000 Augsb. □ Fuß	13302
Berlin, Morgen von 180 Rh. □ Ruthen	24197
England, Acre von 160 □ Ruthen . . .	38343
— □ Ruthe	239,6
Frankfurt a. M., Acker von 160 □ Ruthen	19140
Hannover, Morgen von 120 □ Ruthen .	24844
Mecklenburg, □ Ruthe . . .	205,4
Nürnberg, Morgen von 200 □ Ruthen .	44802
Oesterreich, Jochart oder Joch von 1600 □ Klaftern	54545
Rheinländische Feldmorgen von 120 □ Ruthen	16131
— Waldmorgen von 160 □ Ruthen .	21508
Sachsen, Morgen von 300 □ Ruthen .	57963

Anhang.

Das im Jahr 1793 in Frankreich eingeführte Längen-, Flächen- und Hohlmaaß ist folgendes.

(Nach Vega.)

1. **Metre** ist die Längeneinheit und ist gleich dem 10 millionsten Theil des Pariser Meridianquadranten, welches nach vorigem Maaß 3 Fuß 0 Zoll 11,44 Linien, oder 443,44 Pariser Linien beträgt.

1 Metre	hat	10 Decimetre.
1 Decimetre	—	10 Centimetre.
1 Decametre	—	10 Metres.
1 Hectometre	—	100 Metres.
1 Kilometre	—	1000 Metres.
1 Myriametre	—	10000 Metres.

2. Ein **Are** ist ein Quadrat, dessen Seite 10 Metres oder einen Decametre beträgt und hält folglich 100 Quadrat-Metres.

1 Are	hat	10 Deciare.
1 Deciare	—	10 Centiare.
1 Decare	—	10 Ares.
1 Hectare	—	10 Decares = 100 Ares.
1 Kilare	—	10 Hectares = 1000 Ares.
1 Myriare	—	10 Kilares = 10000 Ares.

3. **Litre** ist ein Würfel, dessen Seite ein Decimetre beträgt und ist also ein Cubik-Decimetre.

1 Litre	hat	10 Decilitres.
1 Decilitre	—	10 Centilitres.
1 Decalitre	—	10 Litres.
1 Hectolitre	—	10 Decalitres = 100 Litres.
1 Kilolitre	—	10 Hectolitres = 1000 Litres,
1 Stere	—	10000 Litres = 1 Cubik-Metre.

Vergleichung des neuen französischen Maaßes mit dem alten.

(Nach Lacroix, Arithmetique, à Paris 1807.)

1. Längenmaaß.

1 Metre hat 0,51307 Toisen.

1 Metre hat 3,07844 Fuß u. s. w.

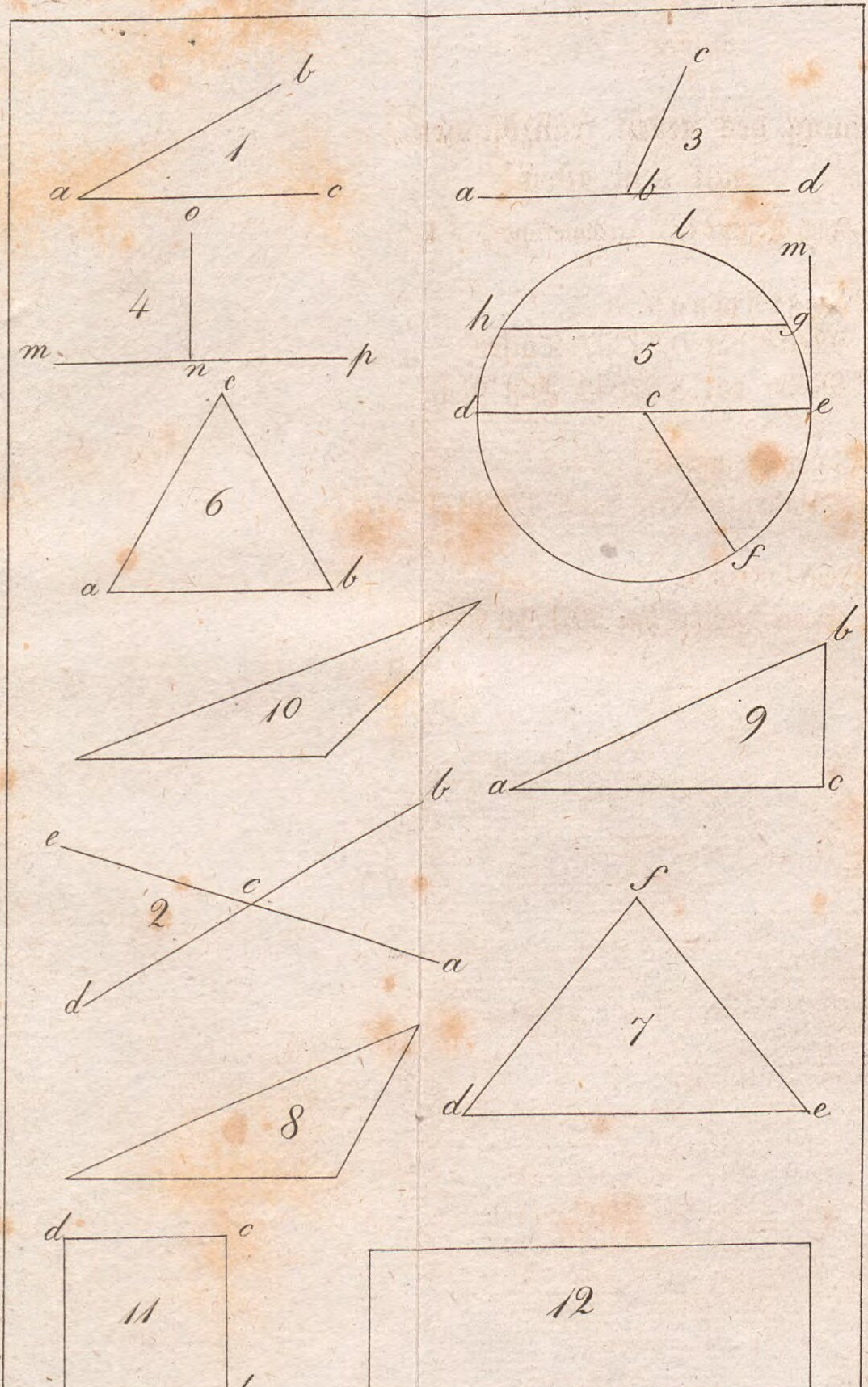
2. Flächenmaaß.

1 Quadrat-Metre hat 9,47682 □ Fuß u s. w.

3. Hohlmaaß.

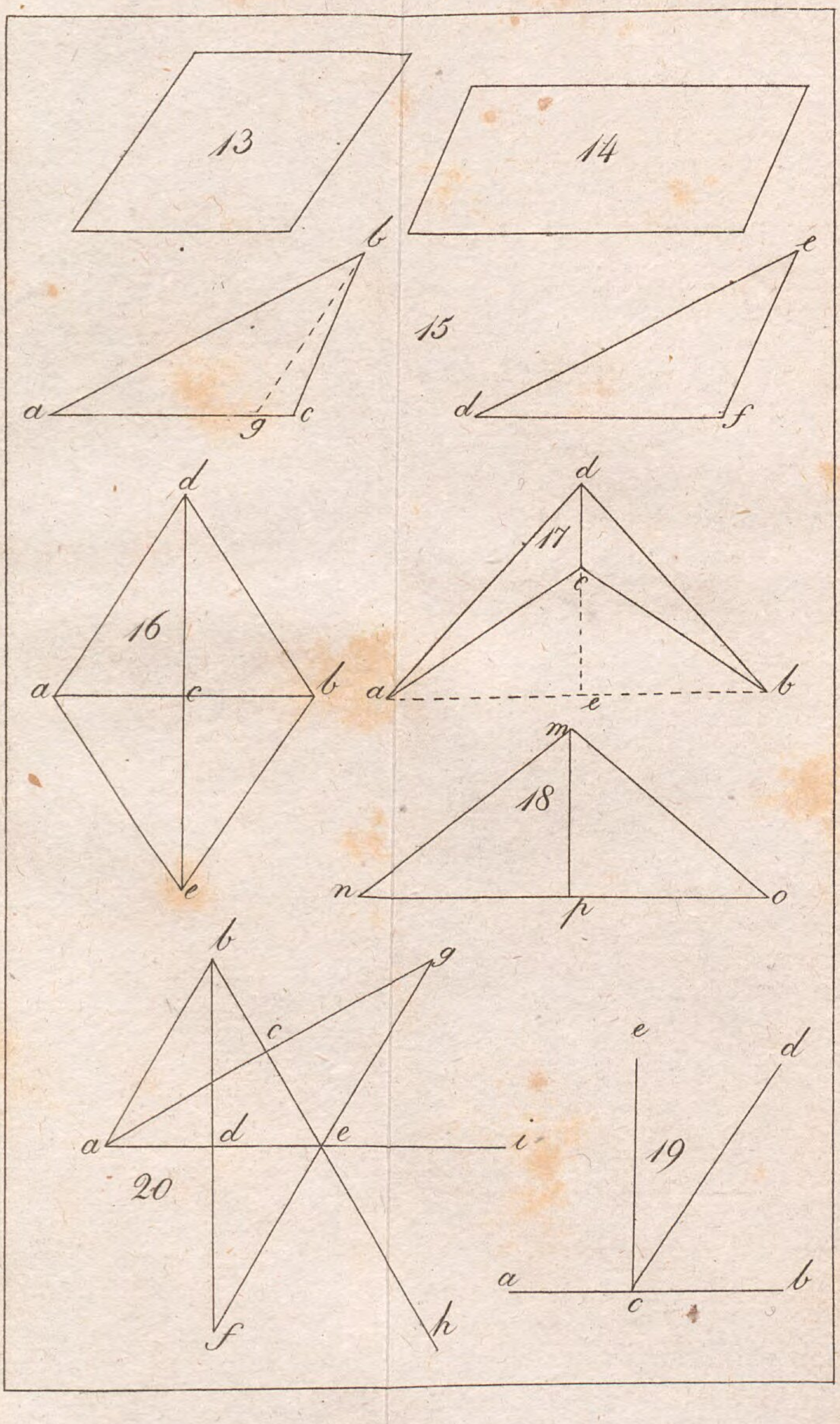
1 Cubik-Metre hat 29,1739 Cubikfuß u. s. w.

Tab. I.



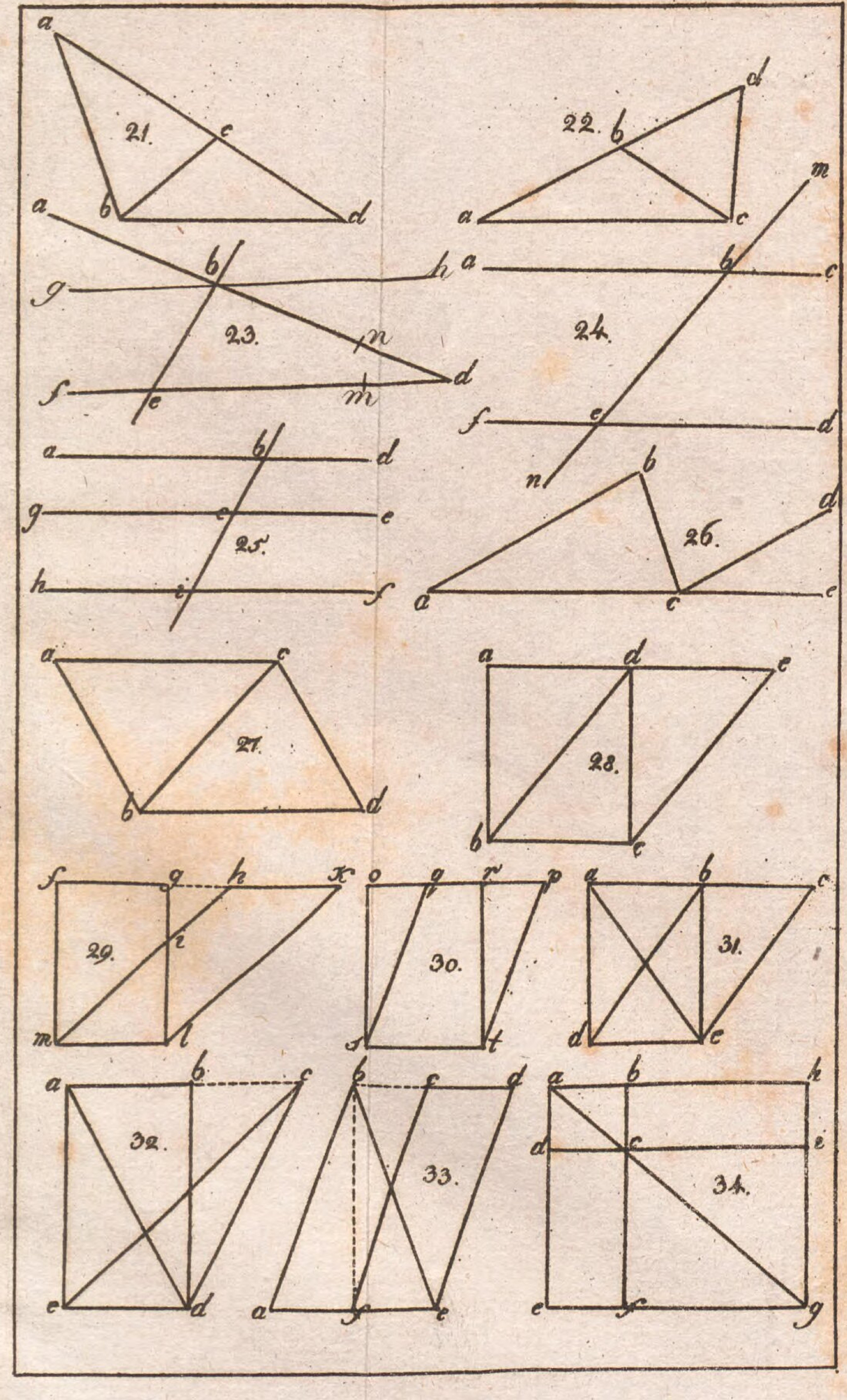
1
a b c
2
a b c d e
3
a b c d
4
m n o p
5
c d e f g h l m
6
a b c
7
d e f
8
9
a b c
10
11
a b c d
12

Tab. II.

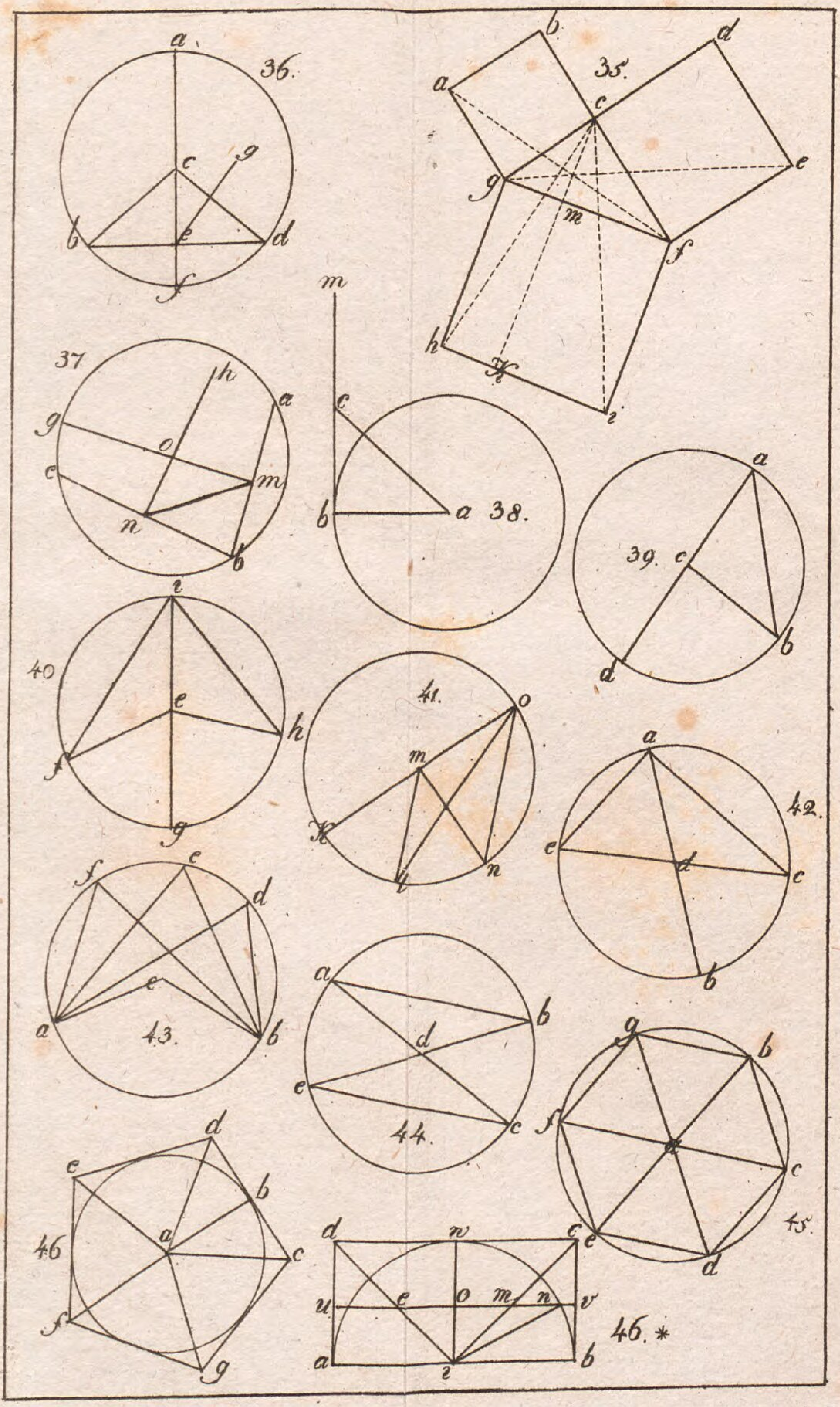

13
14
b
15
e
a
g
c
d
f
d
d
17
c
16
a
c
b
a
b
e
m
18
e
n
p
o
b
g
c
e
d
a
d
e
i
19
20
a
c
b
f
h

Zu Stein's Geometrie

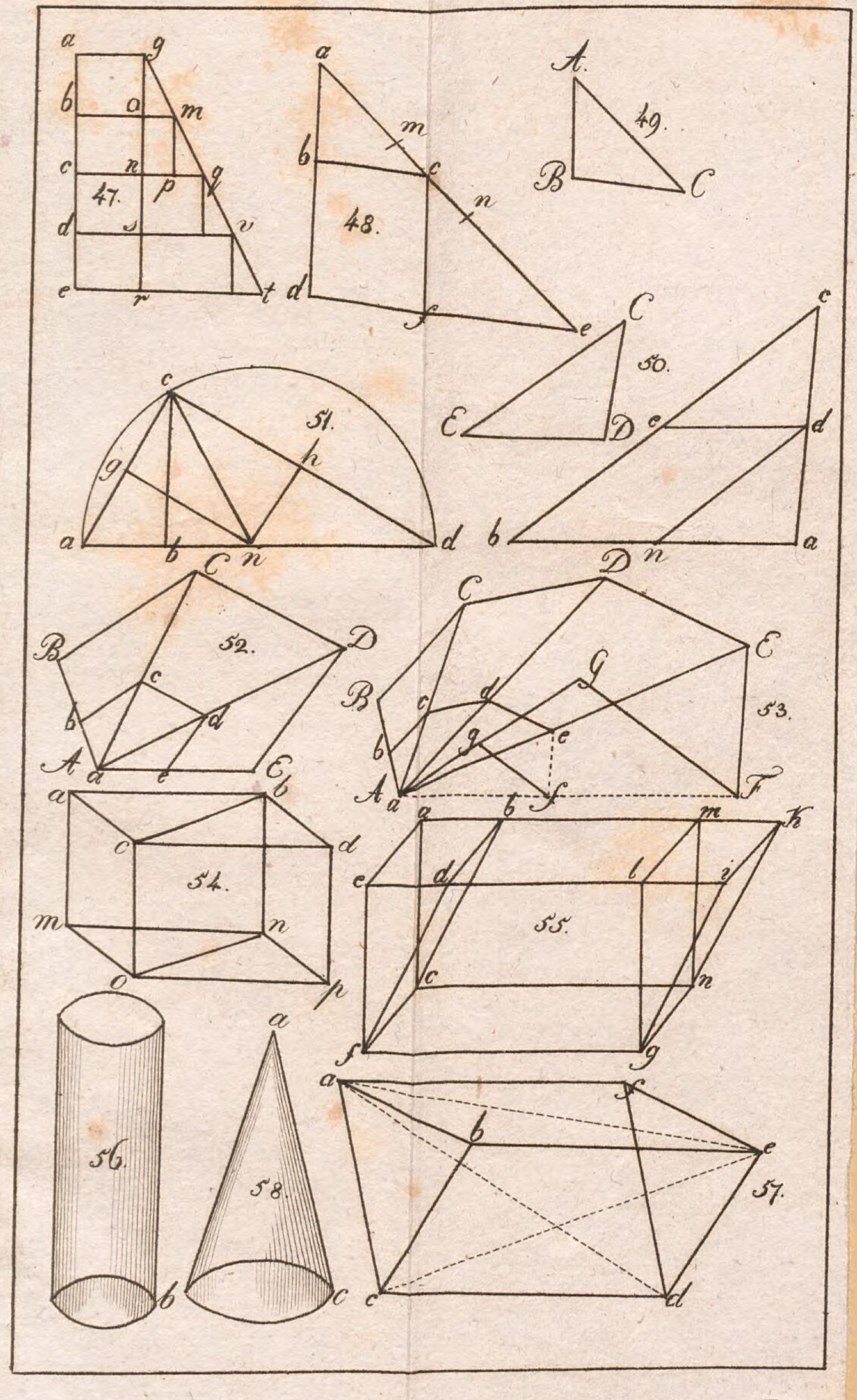
Tab. III.



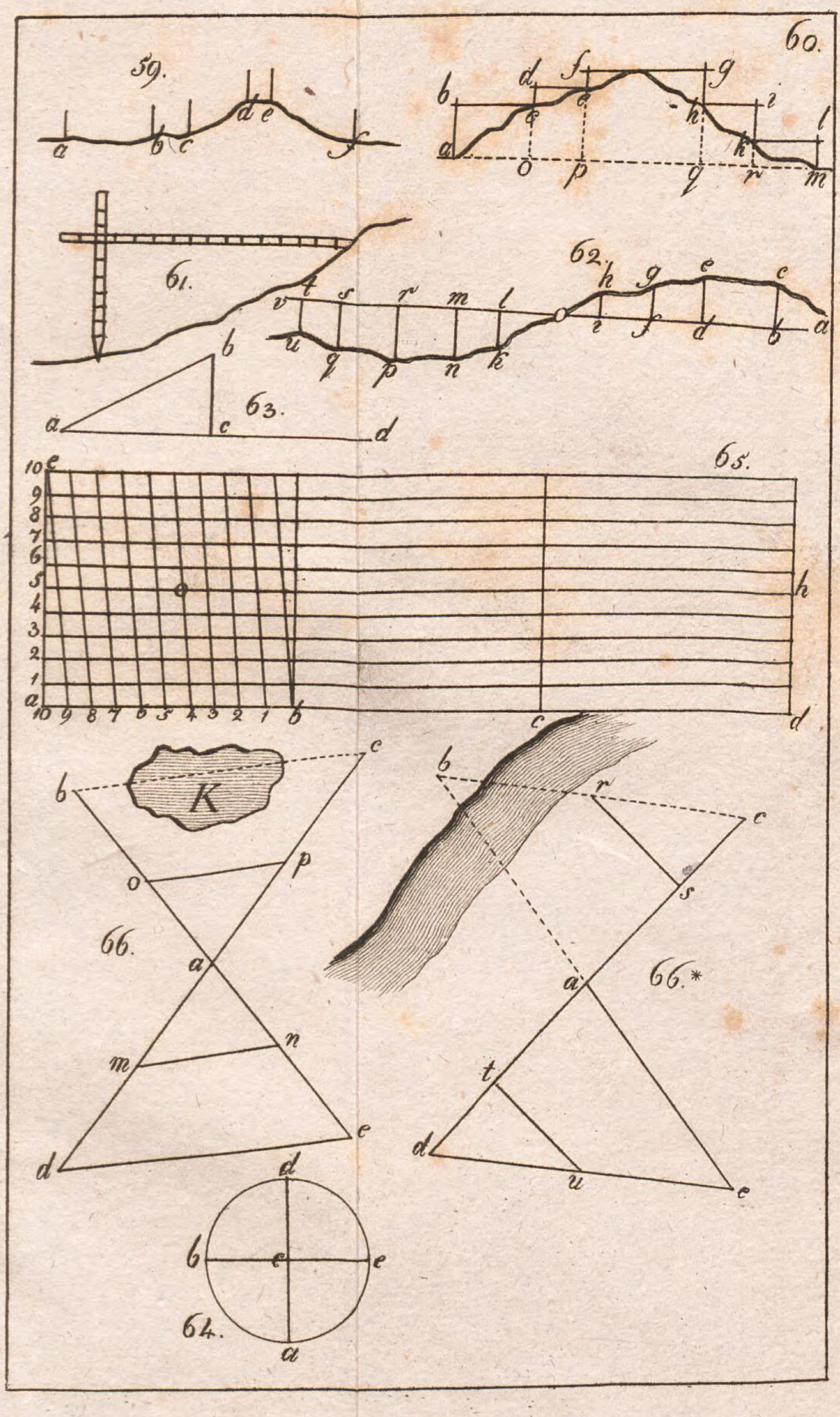
Tab. IV.



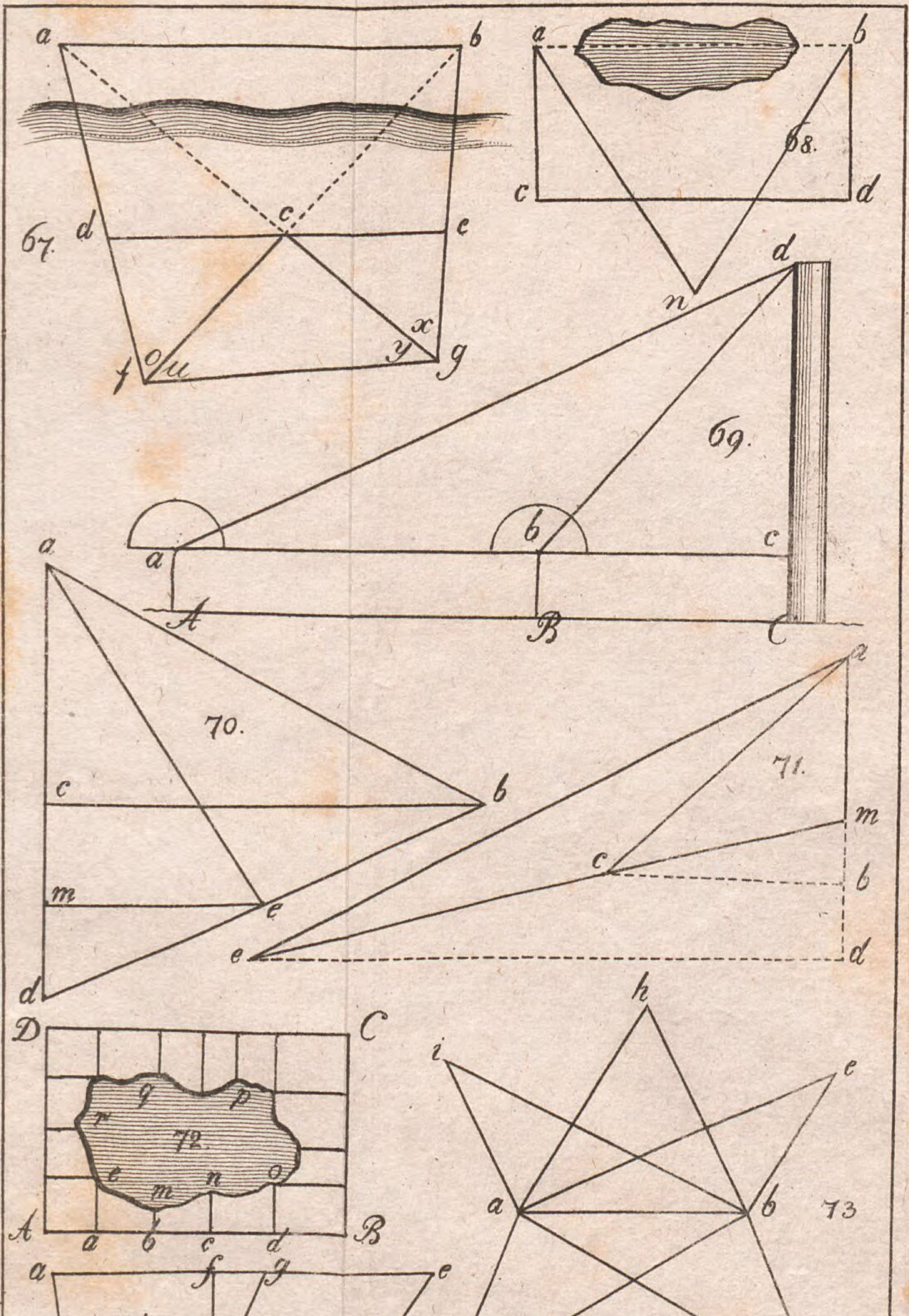
Tab. V.


47.
a g b o m c n q p d s v e r t
48.
a m b c n d f e
49.
A B C
50.
C E D c e d b n a
51.
c g h a b n d
52.
C B D c b d A a e E
53.
D C E B G c d b g e A a f F
54.
a b c d m n o p
55.
a b m k e d l i c n f g
56.
b
58.
a c
57.
a f b e c d

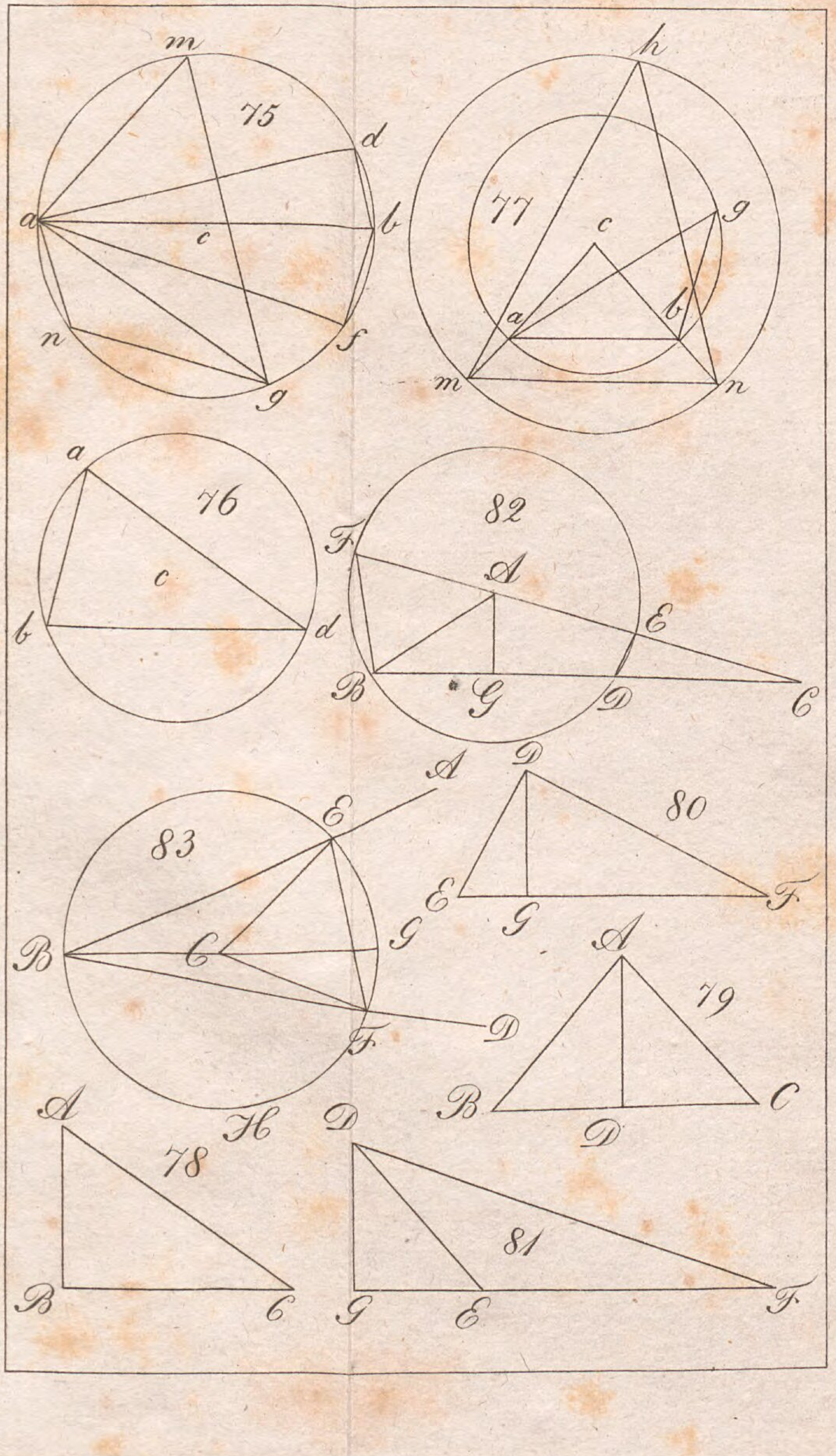
Tab. VI.


59.
a b c d e f
60.
b d f g i l
a c e h k
o p q r m
61.
b
62.
h g e c
v t s r m l
i f d b a
u q p n k
63.
a b c d
65.
e 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 a
h
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 b c d
K
b c o p
66.
a
m n
d e
b r c
s
a
66.*
t
d u e
d
b c e
64.
a

Tab VII.


67.
a b d c e f o u y x g
68.
a b c d n
69.
d a b c A B C
70.
a c b m e d
71.
a m c b e d
72.
D C q p r 72. e m n o A a b c d B
73.
h i e a b c d 73
74.
a f g e b c d 74.

Tab. VIII.


75
m
d
a
b
c
n
f
g
77
h
g
c
a
b
m
n
76
a
c
b
d
82
F
A
E
B
G
D
C
83
A
E
B
C
G
F
D
H
80
D
E
G
F
79
A
B
C
D
78
A
B
C
D
81
G
E
F

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Stein, Karl Philipp Christian,

Carl Phil. Christ. Stein's, vormals Prorector am Gymnasium zu Idstein, Grundlehren der reinen und practischen Geometrie für die ersten Anfänger

Frankfurt am Mayn 1820

Math.p. 541 f

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082886-3